كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الاولى /عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

٣

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

$d: X \to X$ يكون (X, d) فضاء متري إذا تحقق:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

بعض الفضاءات الشهيرة:

1. $\mathbb{R}$ $\quad d(x,y) = |x-y|$ (المسافة العادية)
2. $\mathbb{R}^n$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
3. $\mathbb{R}^3$ $\quad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2}$
4. $C_{[a,b]}$ فضاء التوابع المستمرة والمعرفة على المجال $[a,b]$

$$d(x,y) = \max |x(t) - y(t)|$$

5. ℓ^p فضاء المتتاليات العددية

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

التمرين الأول:

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية و d معرفة بالشكل:

$$d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

والمطلوب: أثبت أن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متري.

- الحل: لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) = |x-y| \geq 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

ولنبرهن الخاصة التمييز.

② $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$

$\forall x,y \in \mathbb{R}$

③ $d(x,y) = |x-y| = |-(y-x)| = |-1| \cdot |y-x|$

$d(x,y) = |y-x| = d(y,x) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

④ $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y|$

$d(x,y) \leq |x-z| + |z-y|$

$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

بمتابعة الشروط ①، ②، ③، ④ نستنتج أن $(\mathbb{R}, d)$ فضاء متري.

التمرين الثاني:

$$d: C_{[a,b]} \times C_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = \max_{a\leq t\leq b} |x(t) - y(t)| \qquad \forall x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$$

برهن أن $(C_{[a,b]}, d)$ فضاء متري.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مثال: لنتحقق من شروط الفضاء المتري:

① $d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| \ge 0 \quad \forall x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$

② $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| = 0 \Leftrightarrow |x(t)-y(t)| = 0$ $\quad a\le t\le b$

$\Leftrightarrow x(t)-y(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t) \quad \forall x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$ $\quad a\le t\le b$

③ $d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| = \max_{a\le t\le b} |-1|\,|y(t)-x(t)|$

$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |y(t)-x(t)| \quad \forall x(t), y(t) \in C_{[a,b]}$

$\Rightarrow d(x,y) = d(y,x)$

④ $\forall x(t), y(t), z(t) \in C_{[a,b]} \Rightarrow$

$d(x,y) = \max_{a\le t\le b} |x(t)-y(t)| = \max_{a\le t\le b} |x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|$

$d(x,y) \le \max_{a\le t\le b} |x(t)-z(t)| + \max_{a\le t\le b} |z(t)-y(t)|$

$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

بمعرفة الشروط ①, ②, ③, ④ نجد أن $(C_{[a,b]}, d)$ فضاء متري.

ملاحظة: الأسس المترافقين: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff q = \frac{p}{p-1} \iff$$

$$(p-1)q = p$$

متراجحة هولدر:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

التمرين الثالث:

برهن متراجحة:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

البرهان: انطلاقاً من:

$$|a_i + b_i| \leq |a_i| + |b_i|$$

$$|a_i + b_i|^p \leq [|a_i| + |b_i|]^p$$

$$|a_i + b_i|^p \leq (|a_i| + |b_i|)(|a_i| + |b_i|)^{p-1}$$

نأخذ المجموع:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i + b_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|(|a_i| + |b_i|)^{p-1}$$

نطبق متراجحة هولدر على الطرف الأيمن:

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p \le \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\right)+$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\left[\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}\right)$$

نأخذ عامل مشترك:

$$\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p \le \left(\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

من الملاحظة ★ $(p-1)q=p$ ونقسم على:

$$\left[\sum_{i=1}^{n}|a_i+|b_i|)^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right]^{1-\frac{1}{q}} \le \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(|a_i|+|b_i|)^p\right]^{\frac{1}{p}} \le \left[\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{n}|b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

انتهت المحاضرة