كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الثانية /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

القسم: الرياضيات
السنة: الثانية
المادة: تحليل رياضي -4-

الدكتورة: عايدة علي صبابة
المحاضرة: الثانية نظري

التاريخ: / /

A to Z Library for university services

تعريف الجوار المستطيلي:

لتكن $x \in \mathbb{R}^n$ حيث $x=(x_1,\dots,x_n)$ و $\delta_i > 0$ من أجل $\delta_i \in \mathbb{R}$ و $i=1,2,\dots,n$ فنرمز للجوار المستطيلي للنقطة x في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ذي n بعداً هي $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ بالرمز: $P(x,\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)$

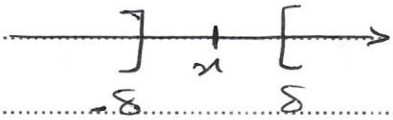
ونعرفه بأنه المجموعة:

$$P(x,\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_n)=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ;\ |y_i-x_i|<\delta_i ;\ \forall i=\{1,2,\dots,n\}\}$$

عندما $n=1$:

عندئذ نرمز للجوار المستطيلي بالشكل: $P(x,\delta)$:

$$P(x,\delta)=\{y\in R ;\ |y-x|<\delta\}$$



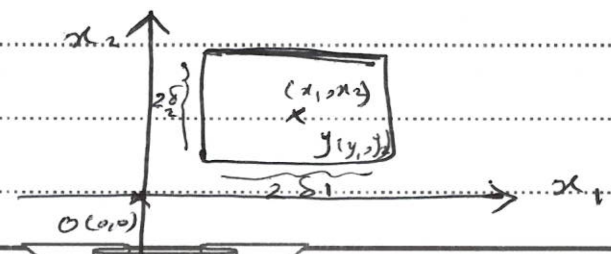
وهو عبارة عن مجال مفتوح مركزه x ونصف قطره δ وطوله 2δ

عندما $n=2$:

نحصل في المستوي $\mathbb{R}^2$ على الجوار المستطيلي ذي البعدين δ_1 و δ_2 وهو عبارة عن مستطيل بعداه $2\delta_1$ و $2\delta_2$ ويكون موازياً للمحاور الإحداثية كما في الشكل:

$|x_1-y_1|<\delta_1$

$|x_2-y_2|<\delta_2$



مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

$|x_1 - y_1| < \delta_1$

$|x_2 - y_2| < \delta_2$

$p(x, \delta_1, \delta_2) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 ; |x_1 - y_1| < \delta_1 \wedge |x_2 - y_2| < \delta_2\}$

عندما $n=3$:

عندما $n=3$ نحصل على متوازي مستطيلات وعندما :

$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n$ نحصل على مكعب ذي n بعد ونرمز له بالرمز :

$p(x, \delta)$.

نتيجة :

أي مجموعة جزئية $A \subseteq \mathbb{R}^n$ تحوي كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها ε ندعوها جواراً كروياً للنقطة x حيث : $x \in \mathbb{R}^n$.

تعريف المجموعة المفتوحة :

نقول عن المجموعة الجزئية A من $\mathbb{R}^n$ أي $A \subseteq \mathbb{R}^n$ انها مجموعة مفتوحة إذا كانت من أجل كل نقطة x من A توجد كرة مفتوحة مركزها النقطة x محتواة بأكملها في المجموعة A . أي :

A مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n \iff \forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N(x, \varepsilon) \subset A$

تعريف المغلقة :

نقول عن المجموعة B انها مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n$ حيث B مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^n$ إذا كانت متممتها مجموعة مفتوحة أي ~~[illegible]~~

B مجموعة مغلقة في $\mathbb{R}^n \iff \bar{B} = \mathbb{R}^n - B$ مجموعة مفتوحة في $\mathbb{R}^n$.

المجموعة المحدودة :

نقول عن المجموعة A من $\mathbb{R}^n$ انها محدودة في $\mathbb{R}^n$ إذا كان بالإمكان حصر جميع عناصرها ضمن جوار كروي أو جوار مستطيلي في $\mathbb{R}^n$.

المتتاليات العددية في $\mathbb{R}^n$:

تعريف :

ندعو كل تطبيق $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ والمعرف بالشكل التالي :

$$1 \xrightarrow{f} f(1) = (U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \ldots, U_n^{(1)}) = U^{(1)} \in \mathbb{R}^n$$

$$2 \xrightarrow{f} f(2) = (U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \ldots, U_n^{(2)}) = U^{(2)} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

$$m \xrightarrow{f} f(m) = (U_1^{(m)}, U_2^{(m)}, \ldots, U_n^{(m)}) = U^{(m)} \in \mathbb{R}^n$$

$$\vdots$$

بمتتالية عددية في $\mathbb{R}^n$ حدودها : $U^{(1)}, U^{(2)}, U^{(3)}, \ldots, U^{(m)}, \ldots$

و $U^{(m)}$ حدها العام و $U^{(1)}$ حدها الأول .

- ونرمز لهذه المتتالية عادةً بأحد الرموز التالية :

$(U^{(m)})_{m \geq 1}$ أو $(U^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$

أو $(U^{(m)})_{n=1}^{\infty}$

ندعو المتتالية $(U^{(m_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ متتالية جزئية من المتتالية العددية $(U^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ في $\mathbb{R}^n$ إذا تحقق الشرط التالي إذا كان $K_1 < K_2$ فإن :

$$m_{K_1} < m_{K_2}$$

مثال :

من أجل $n = 3$ أي في الفضاء $\mathbb{R}^3$ فإن المتتالية العددية التي حدها العام :

$$U^{(m)} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{m}}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\left(1 + \tfrac{1}{m}\right)^m}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{e^m}_{\in\mathbb{R}}\Big)$$

هي متتالية من $\mathbb{R}^3$.

ملاحظة:

عندما لا يوجد أي التباس بين الرمزين n و m وعندما يكون بعد الفضاء $\mathbb{R}^n$ محدداً أي إذا كانت $\mathbb{R}^2$ أو $\mathbb{R}^3$ ..... عندئذٍ يمكننا استخدام الرمز n مباشرةً بدلاً من m للتعبير عن الحد العام لمتتالية عددية في $\mathbb{R}^n$ (بعد تحديد n طبعاً).

مثال:

المتتالية التي حدها العام:

$$U^{(n)} = (U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, U_3^{(n)}, U_4^{(n)}) = \left(e^n, (-1)^n, \frac{n^2+1}{n^3+3}, \frac{1}{n}\right)$$

متتالية حدودها في الفضاء $\mathbb{R}^4$.

تعريف نهاية متتالية

ندعو النقطة $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ نهاية للمتتالية العددية في $\mathbb{R}^{(n)}$ $(U^{(m)})_{m\geq 1}$ إذا تحقق الشرط الآتي:

أولاً: في حالة الجوار الكروي:

(1): $\forall \varepsilon > 0 \; \exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall m \geq m(\varepsilon) \Rightarrow d(U^{(m)}, a) < \varepsilon$

وبلغة الجوارات نكتبه بالشكل:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall m \geq m(\varepsilon) \Rightarrow U^{(m)} \in N(a, \varepsilon) , m = 1, 2, \ldots$ (2)

أي نكتب بالشكل $(U^{(m)})_{m\geq 1} \subseteq N(a, \varepsilon)$

ثانياً: في حالة الجوار المستطيلي:

يصبح الشرط السابق بالشكل:

$$(3): \begin{cases} \forall P(a, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \; \exists M_0 \in \mathbb{N} ; \forall m > M_0 \\ \Rightarrow |U_1^{(m)} - a_1| < \delta_1 \\ \quad |U_2^{(m)} - a_2| < \delta_2 \\ \quad \vdots \\ \quad |U_n^{(m)} - a_3| < \delta_n \end{cases}$$

وبلغة الجوارات يأخذ الشرط الشكل التالي:

(4): $\forall P(a, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\ \exists m_0 \in \mathbb{N} ; \forall m > m_0 \Rightarrow$

$$U^{(m)} \in P(a, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$$

من أجل $\forall m = 1, 2, \ldots$

وإذا تحقق الشرط السابق بأحد أشكاله الأربعة السابقة (1) أو (2) أو (3) أو (4) نقول إن المتتالية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$ متقاربة من $a \in \mathbb{R}^n$ في $\mathbb{R}^n$ ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} U^{(m)} = a$$

أو $U^{(m)} \xrightarrow[m \to \infty]{} a$

• وفي حال عدم تحقق الشرط السابق بأحد أشكاله (1) أو (2) أو (3) أو (4) نقول أن المتتالية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$ متتالية متباعدة في الفضاء $\mathbb{R}^n$.

بعض النتائج والملاحظات من التعريف السابق:

$\boxed{آ}$: المتتالية العددية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$ في $\mathbb{R}^n$ متقاربة من النقطة $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$ إذا وفقط إذا

تحقق الشرط الموجود في التعريف السابق بأحد أشكاله (1) أو (2) أو (3) أو (4)

$\Updownarrow$ إذا وفقط إذا

كانت جميع حدود المتتالية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$ محتواة في كرة مفتوحة جوار كروي مركزه النقطة a ونصف قطره ε باستثناء عدد منتهٍ من حدود هذه المتتالية

$\boxed{ب}$: المتتالية $(U^{(m)})_{m \geq 1}$ متقاربة في $\mathbb{R}^n$ من النقطة $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ إذا وفقط إذا تحقق: $\lim_{m \to \infty} d(U^{(m)}, a) = 0$

أي: $\lim_{m \to \infty} U^{(m)} = a \iff \lim_{m \to \infty} d(U^{(m)}, a) = 0 \leftarrow \lim d(U^{(m)}, a) = 0$

<< مهمة في التطبيقات العددية >>

ج: نظرية:

الشرط اللازم والكافي حتى تكون المتتالية $(\overset{(m)}{U})_{m\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ متقاربة إلى النقطة $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ هو أن تكون المتتالية العددية $(\overset{(m)}{U_i})_{m\geq 1}$ متقاربة من العدد الحقيقي a_i في $\mathbb{R}$ من أجل $i=1,2,\dots,n$

أي إذا كانت $(\overset{(m)}{U})_{m\geq 1}=\left((\overset{(m)}{U_1},\overset{(m)}{U_2},\dots,\overset{(m)}{U_n})\right)_{m\geq 1}$

متتالية من نقط الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ و $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ نقطة من الفضاء $\mathbb{R}^n$

(نظرية صافة مطلوب برهانها)

$$\lim_{m\to\infty}\overset{(m)}{U}=\lim(\overset{(m)}{U_1},\overset{(m)}{U_2},\dots,\overset{(m)}{U_n})=a=(a_1,a_2,\dots,a_n) \text{ في } \mathbb{R}^n$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{m\to\infty}\overset{(m)}{U_i}=a_i\ ;\ \forall i=1,2,\dots,n \text{ في } \mathbb{R}$$

د: نقول عن المتتالية $(\overset{(m)}{U})_{m\geq 1}$ من نقط الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ انها محدودة في $\mathbb{R}^n$ إذا كان بالإمكان إيجاد جوار كروي أو مستطيلي يحوي جميع حدود هذه المتتالية.

ملاحظة:

إن النتيجة (ج) هي نظرية هامة وبناءً عليها فإن جميع الخواص التي تكون صحيحة من أجل المتتاليات العددية في $\mathbb{R}$ تكون صحيحة من أجل المتتاليات في $\mathbb{R}^n$ ونذكر منها:

أ- كل متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ لها نهاية وحيدة.

2- كل متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ تكون محدودة في $\mathbb{R}^n$.

3- كل متتالية جزئية من ~~هها~~ متتالية متقاربة في $\mathbb{R}^n$ تكون متقاربة نحو نفس النقطة في $\mathbb{R}^n$.

4- نظرية بولزانو وايرشتراس:

من كل متتالية محدودة في $\mathbb{R}^n$ يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.

مثال (4):

• المتتالية التي حدها العام $U_n = (-1)^n$ في $\mathbb{R}$: هي متتالية محدودة في $\mathbb{R}$ ويمكن استخراج المتتالية الجزئية التي حدها العام $\overset{(n)}{U} = (-1)^n$ حيث n زوجي من حدود هذه المتتالية وهي متقاربة نحو العدد (1) في $\mathbb{R}$.

• المتتالية التي حدها العام في $\mathbb{R}^3$:

$$\overset{(n)}{U} = \left(\overset{(n)}{U_1}, \overset{(n)}{U_2}, \overset{(n)}{U_3}\right) = \left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{2n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

المتتالية متقاربة نحو النقطة: $(a_1, a_2, a_3) = (0, \frac{1}{2}, e)$ من الفضاء $\mathbb{R}^3$ لأن:

$$d(\overset{n}{U}, a) = d\left(\left(\overset{(n)}{U_1}, \overset{(n)}{U_2}, \overset{(n)}{U_3}\right), (a_1, a_2, a_3)\right)$$

$$= d\left(\left(\frac{1}{n}, \frac{n+1}{2n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right), \left(0, \frac{1}{2}, e\right)\right)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{n}-0\right)^2 + \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

المجموعات المتراصة في الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$:

تعريف:

نقول عن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ أي $A \subseteq \mathbb{R}^n$ أنها متراصة في هذا الفضاء إذا كانت أي $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

بالإمكان من كل متتالية من نقط المجموعة A استخراج متتالية جزئية متقاربة إلى نقطة منها أي من A.

نظرية هاين بوريل:

الشرط اللازم والكافي حتى تكون مجموعة A من الفضاء المتري $\mathbb{R}^n$ متراصة في $\mathbb{R}^n$ هو أن تكون مغلقة ومحدودة في هذا الفضاء:

الفضاءات المنظمة والفضاءات الإقليدية والعلاقة بينهما:

تعريف الفضاء الخطي:

ليكن V مجموعة ما غير خالية و f حقل تبديلي ندعو المجموعة V والمزودة بالعمليتين

الجبريتين الأولى داخلية (+)

$\forall x,y \in V : x+y = z \in V$

- الثانية خارجية (.) مجموعة مؤثراتها الحقل f:

$\forall \alpha \in f \;\&\; \forall x \in V : \alpha \cdot x \in V$

فضاءً شعاعياً (خطياً) فوق الحقل التبديلي f إذا تحققت الشروط التالية:

أولاً: $(V,+)$ زمرة تبديلية أي:

1- $V \neq \phi$

2- $\forall x,y \in V \Rightarrow x+y \in V$ (V مغلقة على +)

3- + تجميعي على عناصر V:

$\forall x,y,z \in V : (x+y)+z = x+(y+z)$

4- يوجد عنصر حيادي في V هو صفر الفضاء وهو O_V يحقق:

$\forall x \in V : 0+x = x = x+0$

5- يوجد لكل عنصر x من V نظير بالنسبة لـ + هو $(-x)$ يحقق:

$(-x)+(x) = 0$

$(x)+(-x) = 0$

6- + تبديلية على عناصر V أي: $\forall x,y \in V : x+y = y+x$

ثانياً: العملية (.) تحقق الشروط:

1): $\forall x \in V : 1_f \cdot x = x$

2): $\forall \lambda, \mu \in f \;\&\; \forall x \in V : \lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$

3): $\forall \lambda \in f \;\&\; \forall x,y \in V : \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

4): $\forall \lambda, \mu \in f \;\&\; \forall x \in V : (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$

- انتهت المحاضرة -