كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الثانية**

المادة : تحليل رياضي٤

المحاضرة : الاولى /نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

مفردات التحليل (4):

1- مقدمة في الفضاءات المترية والمنظمة والإقليدية.

2- استمرار وتفاضل الدوال التابعة لعدة متحولات.

3- الدوال الضمنية وبعض تطبيقاتها.

4- التكاملات الثنائية والثلاثية.

5- التكاملات المنحنية.

مقدمة في الفضاءات المترية والمنظمة والإقليدية:

الفضاء المتري وخواصه:

تعريف الفضاء المتري:

إذا كانت M مجموعة ما غير خالية أي $M \neq \phi$ ندعو كل تطبيق:

$$d: M \times M \longrightarrow R^+ \cup \{0\}$$

$$(x, y) \longrightarrow d(x, y)$$

والذي يحقق الشروط التالية:

1- $d(x,y) \geq 0 \; ; \; \forall x,y \in M \;\bigwedge\; d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \; ; \; x,y \in M$

2- $d(x,y) = d(y,x) \; ; \; \forall x,y \in M$

3- متراجحة المثلث:

$$\forall x,y,z \in M : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

ندعوه تطبيق مسافة على المجموعة M أو مسافة وندعو $d(x,y)$ بالبعد أو المسافة بين العنصرين x و y من M وندعو الثنائية (M,d) فضاءً مترياً واختصاراً

M فضاء متري و ندعو عناصر الفضاء المتري M بنقاط هذا الفضاء.

بعض الملاحظات والنتائج:

أولاً: ندعو البنود 1 و 2 و 3 موضوعات المسافة المترية أو شروط المسافة المترية.

ثانياً: الشرط الأول (1): $d(x,y) \geq 0$

تعني أن المسافة تطبيق موجب غير سالب والجزء الثاني من هذا الشرط يعني أنه إذا كانت نقطتين ما من الفضاء المتري M متطابقتين فإن المسافة بينهما تكون معدومة.

ثالثاً: الخاصة الثانية (2) ندعوها خاصة التناظر.

بعض الأمثلة عن الفضاءات المترية:

مثال (1):

لتكن M مجموعة ما غير خالية ولنعرف التطبيق: $d: M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

بالشكل التالي:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x = y \\ 1 & ; \quad x \neq y \end{cases}$$

إن (M, d) فضاءً مترياً ندعوه الفضاء المتقطع وندعو d المسافة المتقطعة.

مترك برهانه للعملي أي.

مثال (2):

الفضاء المتري الحقيقي $\mathbb{R}$ أو محور الأعداد الحقيقية.

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف عليها $\mathbb{R}$ التطبيق d بالشكل التالي:

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x,y) = |x-y| \ ; \ \forall x,y \in \mathbb{R}$$

أن d مسافة مترية على $\mathbb{R}$ ندعوها المسافة العادية ويرمز لها أحياناً بـ $|\ |$ فـ $(\mathbb{R}, |\ |)$ فضاءً مترياً وندعوه اختصاراً $\mathbb{R}$ فضاءً مترياً حقيقياً أو محور الأعداد الحقيقية.

يبرهن بالعملي

مثال (3):

فضاء الدوال المستمرة والمعرفة على المجال الحقيقي $[a,b]$ وهو $C[a,b]$:

لتكن $C[a,b]$ هي مجموعة جميع الدوال الحقيقية المعرّفة على المجال الحقيقي $[a,b]$ والمستمرة على هذا المجال والتابعة لحقل حقيقي واحد أي:

$$C[a,b] = \{ f : f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ دالة حقيقية معرفة ومستمرة على $[a,b]$

$$\wedge \ y = f(x) ; x \in [a,b] \}$$

ولنعرّف على هذه المجموعة تطبيق d بالشكل:

$$d : C[a,b] \times C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(f,g) = \max_{a \le x \le b} | f(x) - g(x) | \ ; \ \forall f,g \in C[a,b]$$

إنّ d مسافة على $C[a,b]$ و $C[a,b]$ هو فضاء متري بالنسبة لهذه المسافة يدعوه فضاء الدوال الحقيقية المعرّفة والمستمرة على المجال الحقيقي:

$$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$$

(يترك للعملي).

بعض المتراجحات المساعدة:

أولاً: متراجحة هولدر للمجاميع المنتهية:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

حيث p و q عددان أكبر من الواحد ويرتبطان وفق العلاقة الآتية $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \Rightarrow q = \frac{p}{p-1}$$

وأيضاً: $p = \frac{q}{q-1}$

ثانياً: متراجحة كوشي - بنكوفسكي:

إذا وضعنا في متراجحة هولدر $p = q = 2$ وعوضنا فيها نحصل على متراجحة كوشي - بنكوفسكي التالية:

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

حيث p_i و q_i أعداد حقيقية اختيارية حيث: $i = 1, 2, \ldots, n$

الفضاء المتري الإقليدي ذو n بعداً وهو $\mathbb{R}^n$:

ليكن $\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) ; x_i \in \mathbb{R} ; \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$ = $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ مرة}}$

ولنعرّف على $\mathbb{R}^n$ التطبيق d بالشكل التالي:

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

$$\forall\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

إن d مسافة مترية على $\mathbb{R}^n$ ندعوها المسافة الإقليدية و $(\mathbb{R}^n, d)$ أو اختصاراً $\mathbb{R}^n$ فضاءً مترياً ندعوه الفضاء الإقليدي ذي n بعداً.

(نترك برهانه لجلسة العملي)

* عندما $n = 1$ عندئذٍ نحصل على الفضاء المتري الحقيقي وهو $\mathbb{R}^1$ ومسافته هي:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = (x - y)^{\frac{2}{2}} = |x - y|$$

وهي المسافة العادية.

* عندما $n = 2$ نحصل على الفضاء المتري $(\mathbb{R}^2, d)$ وهو المستوي الحقيقي أو الفضاء الإقليدي الحقيقي ذو البعدين.

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{x ; x=(x_1, x_2) ; x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

والمسافة d تكون بعد التعويض هي:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(x_i-y_i)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2} \; ; \; \forall x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$$

$$y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$$

* عندما $n=3$ نحصل على الفضاء المتري R^3 وهو الفراغ الحقيقي أو الفضاء الإقليدي الحقيقي ثلاثي الأبعاد:

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{x ; x=(x_1, x_2, x_3) ; x_i \in \mathbb{R} ; i=1,2,3\}$$

والمسافة d تكون بعد التعويض هي:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

$$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$$

$$\forall y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$$

بعض الملاحظات على الفضاء $\mathbb{R}^n$:

1. $x\in\mathbb{R}^n = \underbrace{R\times R\times\cdots\times R}_{n \text{ مرة}} \iff x=(x_1,x_2,\dots,x_n) ; x_i\in R \wedge i=1,2,\dots,n$

2. إن الصفري $\mathbb{R}^n$ نرمز له بـ $O_{\mathbb{R}^n}$ وهو مؤلف من n مركبة صفرية وجميعها أصفاراً أي أنها أن: $O_{\mathbb{R}^n} = (\underbrace{0,0,\dots,0}_{n \text{ مركبة}})$

3. ندعو مجموعة النقط:

$$\{x ; x\in\mathbb{R}^n \wedge x=(0,0,\dots,0_{i-1}, x_i, 0_{i+1},\dots,0)\} = Ox_i$$

مجموعة نقط المحور الإحداثي ذو الترتيب i في الفضاء R^n والذي نرمز له بالرمز: Ox_i

وأي نقطة من هذا المحور لها الشكل: $x=(0,0,\dots,0,x_i,0,\dots,0)$

وإن النقط ذو الترتيب i ، وأي شبكة إحداثيات في الفضاء $\mathbb{R}^n$ مؤلفة من (لها)

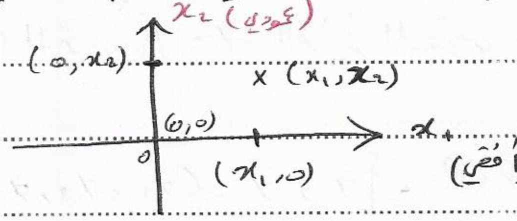
n محور إحداثي.

ومبدأ هذه الشبكة هو النقطة: $O_{\mathbb{R}^n} = (0,0,\dots,0)$ وهو الشعاع

الصفري في الفضاء $\mathbb{R}^n$ ولاننسى أن $\mathbb{R}^n$ هو فضاء خطي (شعاعي) متجهي.

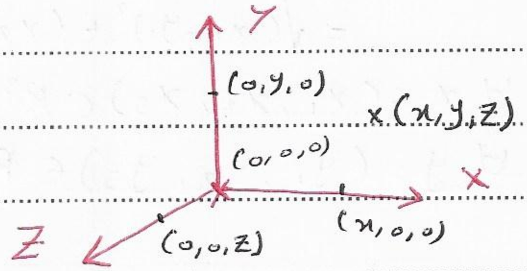
عندما $n=1$ فإن $\mathbb{R}^1$ تملك محور إحداثي واحد وهو المحور الإحداثي الحقيقي.

عندما $n=2$ فإن $\mathbb{R}^2$ يوجد فيه شبكة الإحداثيات الديكارتية Ox_1x_2.



عندما $n=3$ فإن $\mathbb{R}^3$ يوجد فيها شبكة إحداثيات مؤلفة من ثلاث محاور $Oxyz$

ومبدأ الإحداثيات هو $(0,0,0)$.



بعض المفاهيم التبولوجية الأساسية في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$:

تعريف الكرة المفتوحة:

لتكن $x\in\mathbb{R}^n$ نقطة ما حيث: $x=(x_1,\dots,x_n)$

وليكن $\varepsilon>0$ نرمز للكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها ε بالرمز: $N(x,\varepsilon)$ ونعرفها بأنها مجموعة النقاط:

$N(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n ; d(x,y)<\varepsilon\}$ كرة مفتوحة مركزها x ونصف قطرها ε في $\mathbb{R}^n$.

وبالمثل: نرمز للكرة المغلقة التي مركزها x ونصف قطرها ε حيث $x\in\mathbb{R}^n$ و $\varepsilon>0$

بالرمز $B(x,\varepsilon)$ ونعرفها بأنها مجموعة النقط:

$$B(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n ; d(x,y)\le\varepsilon\}$$

ونعرف القشرة الكروية التي مركزها $x\in\mathbb{R}^n$ ونصف قطرها ε والتي نرمز لها بالرمز $S(x,\varepsilon)$ بأنها مجموعة النقط:

$$S(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n ; d(x,y)=\varepsilon\}$$

لدينا دوماً $S(x,\varepsilon)=B(x,\varepsilon)-N(x,\varepsilon)$

* في حالة الكرة المفتوحة:

$$N(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n : d(x,y)<\varepsilon\}=$$

$$N(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ; \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}<\varepsilon\}$$

أما $B(x,\varepsilon)=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n ; \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}\le\varepsilon\}$

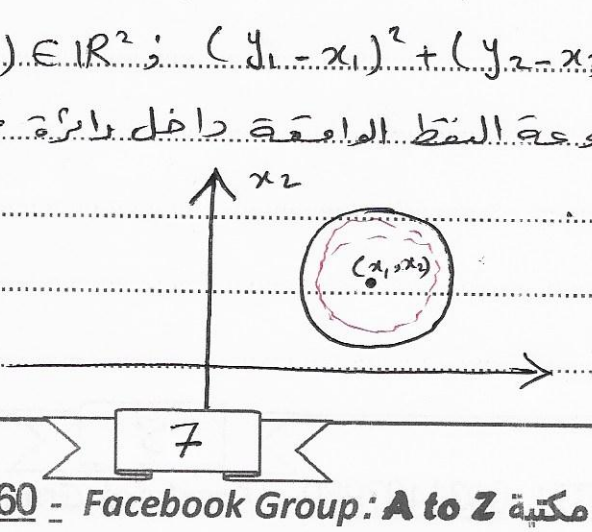
ندعو الكرة المفتوحة التي مركزها x ونصف قطرها ε جوار كروي في $\mathbb{R}^n$ مركزه x ونصف قطره ε.

* عندما $n=1$ فإن الجوار الكروي هو في $\mathbb{R}$ هو مجال مفتوح مركزه x ونصف قطره ε وطوله 2ε.

* عندما $n=2$ فإن الجوار الكروي يكون في $\mathbb{R}^2$ هو المجموعة:

$$\begin{aligned}
N(x,\varepsilon)&=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; d(x,y)<\varepsilon\}\\
&=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}<\varepsilon\}\\
&=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2<\varepsilon^2\}\\
&=\{y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2 ; (y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2<\varepsilon^2\}
\end{aligned}$$

أي هو مجموعة النقط الواقعة داخل دائرة مركزها $x=(x_1,x_2)$ ونصف قطرها ε.



أمّا عندما $n=3$ فإنّ الجوار الكروي في $\mathbb{R}^3$ يكون عبارة عن كرة مفتوحة مركزها (x_1, x_2, x_3) ونصف قطرها ε أي:

$$\{y=(y_1, y_2, y_3) ; (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2<\varepsilon^2\}$$

وبنفس الطريقة فإنّ الكرة المغلقة في $\mathbb{R}$ هي مجال مغلق مركزه x ونصف قطره ε وفي $\mathbb{R}^2$ هي عبارة عن دائرة مركزها (x_1, x_2) ونصف قطرها ε.

انتهت المحاضرة :)