كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : جبر خطي٢

المحاضرة : الثانية/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

كلية العلوم ، كلية الصيدلة ، الهندسة التقنية

2025

4

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

مثال مهم:

$f(x,y) = x.y$

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

~~$\Rightarrow f((x_1,y_1)+(x_2,y_2))$~~

$\Rightarrow f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$

$\Rightarrow f((x_1+x_2),(y_1+y_2))$

$= (x_1+x_2).(y_1+y_2)$

$= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$

$\neq$

~~$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) =$~~ $f(x_1+x_2) + f(y_1+y_2)$

$= x_1y_1 + x_2y_2$

$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) + f(x_1,y_1) + f(x_2,y_2)$ مهم

ك ليست تطبيقاً خطياً

تعريف: ليكن $f: V_1 \to V_2$ تطبيق خطي نسمي عناصر V_1 التي تحقق العلاقة $f(x) = 0_{V_2}$ ، $x \in V_1$ عناصر المنطلق صورتها صفر المستقر وتسمى نواة التطبيق الخطي ويرمز لها بـ $\ker f$ أي أن

$\ker f = \{ x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2} \}$.

مكتبة A to Z - كلية العلوم (جامعة طرطوس) - TEL:0931497960

مبرهنة: الشرط اللازم والكافي ليكون التطبيق الخطي $f: V_1 \to V_2$ متبايناً هو أن يكون $\ker f = \{0\}$

لزوم الشرط:

بفرض أن f متباين، الطلب $\ker f = \{0\}$

$\forall x \in \ker f \Rightarrow f(x) = 0_{V_1}$

$\Rightarrow f(x) = f(0_{V_1})$

$\Rightarrow x = 0_{V_1}$

$\Rightarrow \ker f = \{0\}$

كفاية الشرط:

بفرض $\ker f = \{0\}$

الطلب f متباين

$\forall x_1, x_2 \in V_1 ; f(x_1) = f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = 0_{V_2}$

$f(x_1 - x_2) = 0_{V_2}$

$x_1 - x_2 \in \ker f = \{0\}$

$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f$ متباين.

خواص مهمة:

ليكن $f: V \to W$ تطبيقاً خطياً فإن:

1- $f(0_V) = 0_W$

2- $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in V$

3- $f(x - y) = f(x) - f(y) \quad \forall x, y \in V$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

تعريف: ليكن $f: X \to Y$ تطبيقاً وليكن

$\varphi \neq X_1 \subseteq X$ و $\varphi \neq Y_1 \subseteq Y$

نسمي المجموعة

$$\{ f(x) \mid x \in X_1 \}$$

بالصورة المباشرة لـ X_1 وفق التطبيق f ويرمز لها بـ $f(X_1)$

و يرمز $f(X)$ بـ $Im f$

كما نسمي المجموعة

$$\{ x \in X \mid f(x) \in Y_1 \}$$

بالصورة العكسية للمجموعة Y_1 ويرمز بالرمز $f(Y_1)$

مبرهنة:

ليكن V_1 ، V_2 فضاءين شعاعيين فوق حقل K وليكن

$f: V_1 \to V_2$ تطبيق خطي

1- الصورة المباشرة وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_1 من V_1 هو فضاء شعاعي جزئي من V_2

2- الصورة العكسية وفق f لأي فضاء شعاعي جزئي W_2 من V_2 هو فضاء شعاعي جزئي من V_1.

3- $\ker f$ فضاء شعاعي جزئي من V_1.

البرهان:

1- أ) واضح أن $f(W_1) \subseteq V_2$ و $f(W_1) \neq \varphi$

لأن $\alpha V_1 \in W_1$ و $f(\alpha V_1) = \alpha V_2$

$\alpha V_2 \in f(W_1)$ ومنه

$\forall y_1, y_2 \in f(W), \forall \alpha, \beta \in K$

$\exists x_1, x_2 \in f(W_1)$ بحيث $y_1 = f(x_1)$ ، $y_2 = f(x_2)$ و

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \in f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_1$

لأنّ W_1 فضاء جُزئي

$\in f(W_1)$

وبما أنّ $f(W_1)$ فضاء جُزئي من V_1 إذاً

لـ (أ) ...

ب- (أ)

$f(W_1) \subseteq V_1$ ، $f(W_1) \neq \Phi$

لأنّ $f^{-1}(\mathcal{O}_{V_1}) = \mathcal{O}_{V_2}$

$\mathcal{O}_{V_1} \in f^{-1}(W_1) \Rightarrow \mathcal{O}_{V_2} \in W_1$

(ب) $\forall x_1, x_2 \in f^{-1}(W_1)$ و $\alpha, \beta \in K$.

$\alpha f(x_1) + \beta f(x_1) \in W_2$

$\Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \in W_2$

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in W_2$ ،

وبما أنّ $f(W_1)$ هو T فضاء جُزئي من V_1

ج- واضح أنّ

(أ) $\ker f \subseteq V_1$ و $\ker f \neq \Phi$ و $f(\mathcal{O}_{V_1}) = \mathcal{O}_{V_2}$

$\Rightarrow \mathcal{O}_{V_1} \in \ker f$

(ب)

$\forall x_1, x_2 \in \ker f$ ، $\alpha, \beta \in K$

~~$\alpha f(x_1) +$~~ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) = \mathcal{O}_{V_2}$

$\Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

$= \alpha \mathcal{O}_{V_1} + \beta \mathcal{O}_{V_2} = \mathcal{O}_{V_2}$

$\Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in \ker f$.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: ليكن $W \to V$ تطبيقاً خطياً، ولتكن $x_1, \dots, x_n \in V$

1- إذا كانت $f(x_1), \dots, f(x_n)$ متعلقة خطياً فإن المتجهات $x_1, \dots, x_n$ تكون متعلقة خطياً

2- إذا كانت المتجهات $x_1, \dots, x_n$ متعلقة خطياً وكانت f متباينة، فإن المتجهات $f(x_1), \dots, f(x_n)$ تكون متعلقة خطياً

البرهان:

1- لنفرض أن

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

حيث α_1 مقادير سلمية، عندئذٍ

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow$$

$$f(\alpha_1 x_1) + \dots + f(\alpha_n x_n) = f(0_V)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

إذاً $f(x_1), \dots, f(x_n)$ متعلقة خطياً من أجل $x_1, \dots, x_n$ متعلقة خطياً

2- لنفرض $\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = 0$

حيث α_1 مقادير سلمية، عندئذٍ

$$\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = 0_W$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = f(0_V)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0_V$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

إذاً $x_1, \dots, x_n$ متعلقة خطياً وبالتالي $f(x_1), \dots, f(x_n)$ متعلقة خطياً

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: ليكن V فضاء شعاعي منتهي البعد فرق الحمل k إذا كان w و $f: V \to V$ تطبيقاً خطياً فإن

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z