كلية العلوم

القسم : **الرياضيات**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل متجهات

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر (What's app-Telegram) على الرقم 0931497960

الأشعة:

الشعاع: هو قطعة مستقيمة موجهة لها نهايتان عناصر

① منحى: ذلك الزاوية مع محور الفواصل (الأفق).

② الجهة.

③ الطول: رمزه $|\overrightarrow{AB}|$ نرمز إلى طول القطعة المستقيمة AB.

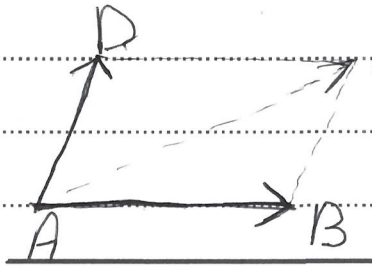
شعاع الوحدة: يطلق شعاع الواحدة لمتجه $\vec{u}$ بالملاقة $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ = $\vec{P_P}$ له نفس المنحى وطويلته تساوي 1 وله نفس جهة $\vec{u}$ أيضاً.

جمع المتجهات:

① قاعدة شال: تجمع هذه القاعدة المتجهات التي تحقق نهاية أحدهما بداية الآخر.

مثال: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

② قاعدة متوازي الأضلاع: تجمع الأشعة التي لها نفس البداية حيث الناتج هو قطر متوازي الأضلاع والذي يشكل منه الشعاعين. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



ملاحظة:

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

ضرب متجه بعدد حقيقي:

ليكن $\vec{u}$ شعاعاً ما، $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\lambda\vec{u}$ شعاع جديد، يحقق:

1) $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ لهما نفس الجهة عندما $\lambda > 0$.

2) $\lambda\vec{u}$ و $\vec{u}$ متعاكسان بالجهة عندما $\lambda < 0$.

3) $|\lambda\vec{u}| = |\lambda| \cdot |\vec{u}|$

ملاحظة: نفرض ارتباط شعاعين خطياً بأنه توازي هذين الشعاعين أي أحدهما ينتج عن الآخر عن طريق ضربه بعدد حقيقي.

الجداء السلمي: هو جداء بين شعاعين والناتج عدد حقيقي يعطى بالعلاقة:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cos\theta$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[|\vec{u}+\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2\right]$

خواص:

1) $(\lambda\vec{u})(\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$

2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3) $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w})$

4) $|\vec{u}| \cdot |\vec{u}| = |\vec{u}|^2$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

المبارة التحليلية

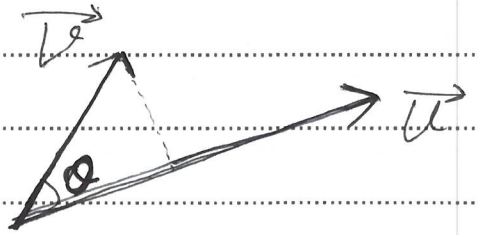
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \; ; \; \vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}.\vec{v} = a.a' + b.b' + c.c'$$

مسقط شعاع على آخر:

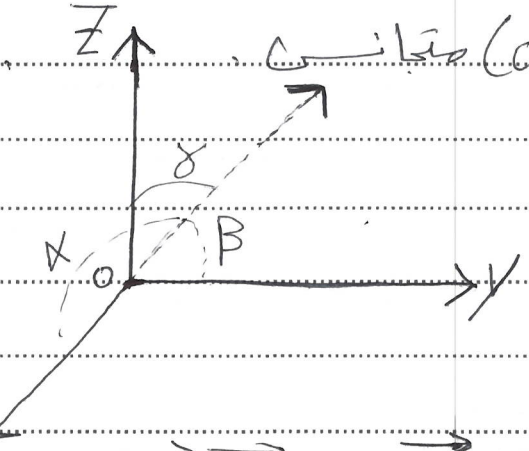
مسقط $\vec{v}$ على شعاع $\vec{u}$ هو عبارة عن طول القطعة المستقيمة التي تصل بين $\vec{v}$ و شعاع واحدة $\vec{u}$ أي المسقط هو:

$$\vec{v}\,\vec{P_u} = |\vec{v}|.|\vec{P_u}|.\cos\theta = |\vec{v}|.\cos\theta$$



جيب تمام التوجيه:

في معلم ما في $\mathbb{R}^3$ متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



$M(x, y, z)$

$$\overrightarrow{OM} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ومنه

$\cos\alpha$ هو $\cos X$

$$\overrightarrow{OM}.\vec{i} = |\overrightarrow{OM}|.|\vec{i}|.\cos\gamma$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.\cos X \Rightarrow \cos X = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \; ; \; \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

أما شعاع واحدة $\overrightarrow{OM}$ يعطى:

$$\overrightarrow{e_{OM}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

$$= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

ملاحظة:

مبرهنة:

برهن أن $|\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$

البرهان:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos\theta$$
$$\leq |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}|.|\vec{v}|$$
$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 \leq (|\vec{u}|+|\vec{v}|)^2$$

ومنه

$$\Rightarrow |\vec{u}+\vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|.$$

مبرهنة:

برهن أن: $|\vec{u}-\vec{v}| \geq |\vec{u}| - |\vec{v}|$

البرهان:

نفرض:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$
$$\Rightarrow |\vec{u}| - |\vec{v}| = |\vec{v}+\vec{w}| - |\vec{v}|$$

مما سبق $\leq |\vec{v}| + |\vec{w}| - |\vec{v}| = |\vec{w}|$.

$|\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{w}| \Rightarrow |\vec{u}| - |\vec{v}| \leq |\vec{u}-\vec{v}|$

تم المطلوب.

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

ملاحظة: عندما تتعامد متجهين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فإن $\vec{u}.\vec{v}=0$

الجداء الخارجي: هو جداء بين متجهين والناتج هو متجه عناصره

1- المنحى: يعامد كلاً من متجهي المتجهين.

2- الجهة: يمثله مع المتجهين ثلاثي مباشر.

3- الطوله:

$$|\vec{u}\wedge\vec{v}| = |\vec{u}|.|\vec{v}|\sin\theta$$

الخواص:

① ليس تبديلي. $\vec{u}\wedge\vec{v} = -\vec{v}\wedge\vec{u}$

② جداء الجماعي لمتجهين متوازيين معدوم $\vec{u}\wedge\vec{v}=0$

③ $(\lambda\vec{u})\wedge(\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u}\wedge\vec{v})$.

المعنى الهندسي: هو مساحة متوازي الأضلاع الذي يشكل المتجهين أو ضعف مساحة المثلث الذي ضلعيه هما المتجهين $\vec{u}, \vec{v}$.

المبارة التحليلية:

نفرض $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ، $\vec{v} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}$.

$$\Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}$$

الجداء المختلط: هو جداء بين ثلاث أشعة والناتج عدد.

$$(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \vec{u}.(\vec{v}\wedge\vec{w}).$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ أيضاً

وعليه نجد:

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$.

$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ المعنى الهندسي:

يمثل حجم متوازي السطوح المنشأ على الأحرف الثلاث

المبادرة التحليلية:

بفرض:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

(1)

$$(\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

(2)

$$(\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w})$$

الجداء المتجهي المضاعف

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

أيضاً $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$

وهذه علاقة حساب

انتهت المحاضرة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z