كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : فيزياء عامة٢

المحاضرة الثالثة/نظري/

{{ A to Z مكتبة }}

Facebook Group : A to Zمكتبة

- حركة شحنة نقطية في حقل كهربائي :

نفرض أنه لدينا جسيم كتلته m ويحمل شحنة q_0 ويتحرك ضمن حقل كهربائي $\vec{E}$ ثابت ومنتظم ناتج عن شحنة أخرى q . عندئذٍ نلاحظ أن هذا الجسيم يخضع لقوة كهربائية $\vec{F} = q_0 \vec{E}$ من جهة أخرى يخضع هذا الجسيم لقانون نيوتن أي أن

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

حيث $\vec{a}$ تسارع هذا الجسيم

بالمقارنة نجد أن

$$q_0\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow a = \frac{q_0}{m}\vec{E}$$

ويكون اتجاه التسارع هو نفس اتجاه الحقل الكهربائي وبالتالي نفس اتجاه القوة الكهربائية فإذا بدأت الشحنة الكهربائية الحركة من السكون فإن سرعتها بعد فترة زمنية t هي

$$\vec{v} = \vec{a}t = \frac{q_0}{m}\vec{E}\,t$$

أما المسافة التي قطعتها خلال هذه الفترة هي

$$\vec{S} = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0}{m}\vec{E}\,t^2$$

وتكون الطاقة الحركية التي اكتسبتها الشحنة خلال حركتها بعد قطع هذه المسافة هي

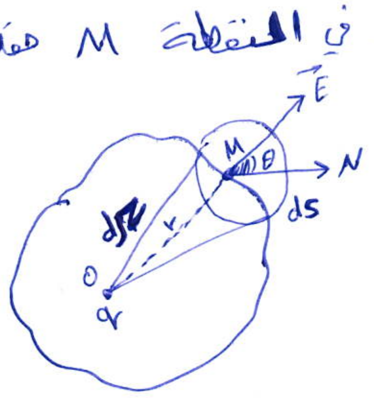
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{q}{m}E\,t\right)^2 = q_0\vec{E}\,\vec{S} = \vec{F}\,\vec{S}$$

وبالتالي الطاقة الحركية هي العمل الذي قدمه الحقل الكهربائي لتحريك الشحنة q_0 مسافة قدرها $\vec{S}$

- تدفق الحقل الكهربائي المتولد عن شحنة نقطية : (نظرية غوص)

نفرض أن لدينا الشحنة النقطية (q) في النقطة (O) حيث تولد في النقطة M حقلاً كهربائياً شدته العددية

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$



لنعرف تدفق الحقل $\vec{E}$ من خلال السطح العنصري ds الذي يحيط بالنقطة M بأنه الجداء السلمي

$$d\phi = \vec{E}\,ds = E \cdot ds\cos\theta$$

حيث أن $\vec{ds}$ هو شعاع طويلته تساوي مساحة السطح العنصري واتجاهه هو اتجاه الناظم على ds (اتجاه الخروج من السطح) هو الاتجاه الموجب

$d\Omega$: الزاوية المجسمة

نعوض لنا E بقيمتها في العلاقة السابقة مباشرة فنجد

$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{ds\cos\theta}{r^2}$$

ان المقدار $\frac{ds\cos\theta}{r^2}$ يمثل الزاوية المجسمة $d\Omega$ الذي نرى فيها السطح من النقطة (O) حيث توجد الشحنة (q) إذاً

$$\phi = \int d\phi = \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,4\pi = \frac{\sum_{i=1} q_i}{\varepsilon_0}$$

تعني هذه العلاقة ان تدفق الحقل الكهربائي لشحنة أو مجموعة الشحنات خلال سطح مغلق يساوي مجموع الشحنات الواقعة داخل هذا السطح مقسوماً على ε_0

إذا كانت الشحنة واقعة خارج هذا السطح فان التدفق معدوم لأن خطوط الحقل الكهربائي التي تدخل في موقع ما تخرج من الموقع المقابل على السطح فإذا كان التدفق الداخل موجب والخارج سالب فيكون المجموع معدوم.

أما إذا كانت الشحنة واقعة على السطح فان $(d\Omega = 2\pi)$ أي ان

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{2\varepsilon_0}$$

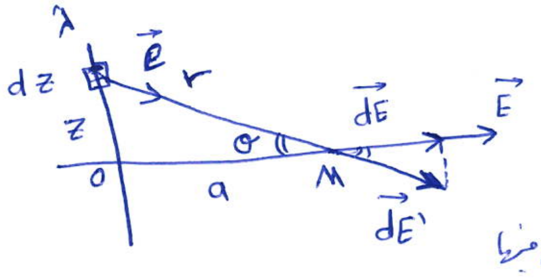
* تطبيقات على حساب الحقل والكمون الكهربائي في حالة توزع مستمر للشحنات:

1- حساب الحقل المتولد عن سلك طوله محدود ومشحون بكثافة خطية منتظمة وذلك في نقطة تقع على محوره:

ليكن السلك المشحون بكثافة خطية منتظمة λ

ولنحسب شدة الحقل المتولد عنه في نقطة ما من محوره وتبعد عنه مسافة $a = OM$

توجد طريقتان للحساب:



$\boxed{P}$ طريقة الحساب المباشر:

لتكن النقطة M التي تبعد عن السلك مسافة قدرها a ولنحسب شدة الحقل فيها

نأخذ عنصراً من السلك طوله dz ويبعد عن محور السلك مسافة z

عندئذٍ يحمل هذا الطول العنصري شحنة عنصرية

$$dq = \lambda\, dz$$

وبما أننا نستطيع أن نأخذ الطول dz صغيراً إذاً يمكن أن نطبق عليه حالة الشحنة النقطية

$$\vec{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dz}{r^2}\, \vec{e}$$

$\vec{e}$: شعاع الواحدة على المحور الواصل بين الشحنة dq والنقطة M

نلاحظ أنه يمكننا تحليل $\vec{dE'}$ إلى مركبتين إحداهما محمولة على المحور OM والثانية موازية للسلك ولكن إذا أخذنا عنصراً آخر من السلك مناظراً لـ dz بالنسبة للمحور OM فإنه يولد حقلاً في النقطة M مناظراً لـ $\vec{dE'}$ بالنسبة للمحور OM .

ويمكن تحليل هذا الحقل أيضاً إلى مركبتين ، فنجد أن المركبة الموازية للسلك تساوي وتعاكس المركبة الناتجة عن العنصر السابق وبالتالي تكون محصلة المركبات الموازية للسلك معدومة .

نستنتج من ذلك أن منحنى الحقل عمودي على السلك . أي أنه منطبق على الاستقامة OM ومتجه من O إلى M إذا كانت λ موجبة وبالعكس من M إلى O إذا كانت λ سالبة .

ولمعرفة قيمته العددية نجري التكامل للمركبات المحمولة على OM فقط أي $\vec{dE}$

$$dE = dE' \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dz}{r^2} \cos\theta$$

وبالتالي فإن الحقل الكلي

$$E = \int dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dz}{r^2} \cos\theta \qquad (1)$$

نلاحظ من الشكل

$$z = a\, tg\,\theta \quad , \quad r = \frac{a}{\cos\theta} \Rightarrow dz = \frac{a}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

فإذا بدلنا كلاً من dz و r بقيمتيهما في المعادلة (1) نجد أن

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \int_{-\theta_1}^{+\theta_1} \cos\theta\, d\theta$$

θ_1 : الزاوية المقابلة لنصف طول السلك

وبالتالي

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \sin\theta_1 \qquad (2)$$

وهي قيمة الحقل المتولد عن سلك طوله محدود في نقطة واقعة على محوره وتبعد مسافة قدرها a

نلاحظ أنه إذا أصبح طول السلك لا نهائياً فإن $\sin\theta_1 = 1$

وبالتالي فإن العلاقة (٤) تصبح بالشكل

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

وهي شدة الحقل المتولد عن سلك طوله لا نهائي

٢ - طريقة نظرية غوص :

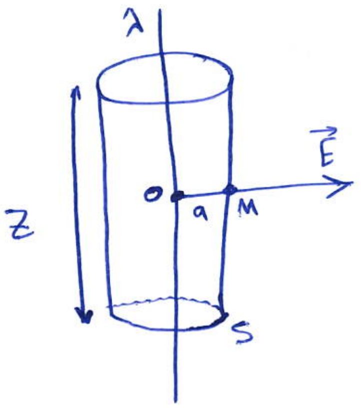
بواسطة هذه الطريقة نستطيع حساب شدة الحقل بصورة أسرع

ونلاحظ بسبب التناظر أن الحقل $\vec{E}$ محمول على المستقيم oM

وشدته العددية تحسب بتطبيق نظرية غوص على سطح اسطوانة مغلقة (S)

نصف قطرها $(a = oM)$ ومحورها منطبق على السلك المشحون

وارتفاعها Z .



$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\,\vec{ds} = \frac{\sum_{i=1}^{n} q_i}{\varepsilon_0}$$

إن تدفق الحقل من خلال قاعدتي الاسطوانة معدوم

لأن الحقل عمودي على الناظم على هذين السطحين

أما التدفق من خلال السطح الجانبي فيمكن حسابه

بعد معرفة أن الزاوية الكائنة بين الناظم على السطح الجانبي والحقل $\vec{E}$ معدومة

أي أن $\cos\theta = 1$

والحقل ثابت في كل نقطة من نقاط السطح الجانبي وذلك بسبب التناظر

$$E\,2\pi a Z = \frac{\lambda Z}{\varepsilon_0}$$

وبالتالي

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

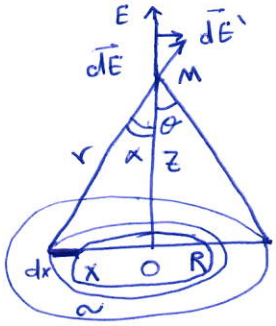
نحصل على الشدة التي توصلنا إليها بطريقة الحساب المباشر نفسها .

حساب الحقل المتولد من قرص دائري مشحون بكثافة سطحية منتظمة :

- حساب الحقل :

ليكن R نصف قطر القرص و σ الكثافة السطحية . ولنحسب الحقل في النقطة M في الخلاء . التي تبعد مسافة قدرها z علماً أن M تقع على العمود المقام على القرص في مركزه o .

نأخذ حلقة دائرية مركزها (o) ونصف قطرها x وسمكها dx كما في الشكل



فتحمل شحنة قدرها: $dq = \sigma\, ds = 2\pi\sigma\, x\, dx$

تولد في النقطة M حقلاً كهربائياً

$$\vec{dE'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x\,dx}{r^2}\vec{u}$$

نأخذ بعين الاعتبار فقط المركبة dE المحمولة على المحور OM لأن الحقل الكلي $\vec{E}$ يجب أن يكون محمولاً على OM وذلك بسبب التناظر وموجهة من o إلى M إذا كانت الشحنة موجبة. ومن M إلى o إذا كانت سالبة .

إذاً:

$$dE = dE' \cos\alpha = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x\,dx}{r^2}\cos\alpha \qquad (*)$$

نلاحظ في الشكل أن

$$r = \frac{z}{\cos\alpha} \quad , \quad x = z\, tg\alpha$$

$$dx = \frac{z}{\cos^2\alpha}\, d\alpha$$

نبدل في المعادلة (*) فنجد بعد المكاملة

$$E = \int dE = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{\theta} \sin\alpha\, d\alpha$$

وبالتالي قيمة الحقل الكهربائي

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\theta)$$

أو بالشكل التالي

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

- حساب الكمون :

نطبق قانون الشحنة النقطية فنجد :

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\frac{x\,dx}{r}$$

وبالتالي الكمون الكلي المتولد عن القرص

$$V=\int dV = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^R \frac{x\,dx}{r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}\int_0^R\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{R^2+z^2}-z\right]$$

لحساب قيمة الكمون بمركز القرص نجعل $z=0$ فنجد

$$V_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}R$$

وهي قيمة الكمون في أية نقطة من سطح القرص وبالتالي القرص يشكل سطحاً متساوي الكمون

حالة خاصة :

عندما يصبح القرص مستوٍ لانهائي فإن الزاوية θ تصبح مساوية $\frac{\pi}{2}$ وبالتالي يصبح الحقل

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

والكمون

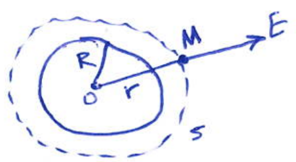
$$V=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|z|$$

وعلاقة الكمون الأخيرة ناتجة من مكاملة علاقة الحقل

ونلاحظ أن الحقل ثابت ولا يتعلق بالبعد عن المستوي المشحون

* الحقل والكمون الكهربائيين المتولدان عن كرة مشحونة :

نفرض أنه لدينا كرة نصف قطرها R مشحونة بشحنات ذات كثافة حجمية $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ وعندئذ نميز ثلاث حالات :



(P) : النقطة تقع خارج الكرة المشحونة :

ليكن لدينا النقطة (M) واقعة خارج التوزع الكروي للشحنات [خارج الكرة المشحونة]

وعلى مسافة $OM=r$ من مركزها .

نلاحظ بسبب التناظر أن الحقل E يجب أن يكون محمولاً على امتداد القطر مهما كان وضع النقطة M خارج أو داخل التوزيع

أما جهة الحقل فهي من O إلى M إذا كانت ρ موجبة

وبالعكس إذا كانت ρ سالبة تكون جهة الحقل من M إلى O .

أما الشدة العددية فتحسب بتطبيق غوص على كرة مركزها (O) ونصف قطرها (r) فيكون

$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow E = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0 r^2}$$

حيث $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

أي أن شدة الحقل في نقطة خارج التوزع الحجمي الكروي للشحنات هي نفسها كما لو كانت الشحنة Q متجمعة بكاملها في المركز O

- أما الكمون فيحسب من العلاقة الاساسية بين الحقل والكمون وهي

$$-dV = E\, dr \Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_\infty^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}$$

إذاً الكمون في نقطة تقع خارج التوزع الكروي الحجمي هو نفسه كما لو كانت الشحنة Q متجمعة بكاملها في مركز الكرة

ويمكن كتابة (V) بتابعية الكثافة الحجمية (ρ)

فنحصل بعد تبديل Q بقيمتها في المعادلة السابقة على علاقة (V)

$$V = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

ب - النقطة تقع على سطح الكرة :

في هذه الحالة نبدل في العلاقات السابقة R بـ r أي $R = r$

عندئذ نجد الحقل :

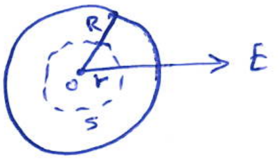
$$E_s = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}$$

أما الكمون

$$V_s = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

ج : النقطة تقع داخل الحجم الكروي :

في هذه الحالة نطبق نظرية غوص على كرة مركزها O ونصف قطرها $r = OM$



$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\, d\vec{s} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\, \frac{\pi r^3}{\varepsilon_0}\, \rho$$

أي يؤخذ بعين الاعتبار فقط مجموع الشحنات الكائنة داخل السطح S

أما الشحنات الواقعة خارجه فلا تدخل في الحساب وينتج أن قيمة الحقل

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

وبمكاملة الحقل نحصل على قيمة الكمون

$$V = -\frac{1}{2}\, \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} + C \qquad (\star)$$

نعين قيمة C من قيمة V_s فنجد

$$C = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$$

فإذا بدلنا (C) بقيمتها في المعادلة ($\star$) نجد

$$V = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(R - \frac{r^2}{3}\right)$$

مثال : ما مقدار الشحنة التي يمكن أن تحملها كرة قطرها 10 cm قبل حدوث شرارة كهربائية علماً أن الشرارة تحدث في الهواء عندما تزيد شدة الحقل الكهربائي إلى $3 \times 10^6 \frac{N}{C}$

الحل : نعلم أن الحقل الكهربائي المتولد عن كرة مشحونة وذلك في نقطة خارج الكرة هو $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ ولكن شرط الحصول على أقصى شحنة قبل حدوث الشرارة هو أن نضع في العلاقة السابقة $r = R$ ثم نستعمل القيمة القصوى لشدة الحقل أي $E = 3 \times 10^6 \frac{N}{C}$ (وهذا يناظر أقصى الشحنة)

بالتعويض نجد

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \Rightarrow 3 \times 10^6 = 9 \times 10^9 \frac{Q}{(0{,}05)^2} \Rightarrow Q = 0{,}83 \times 10^{-6} = 1\,\mu C$$

تطبيق : ما هي شدة الحقل الكهربائي على بعد 75 cm من مركز الكرة عندما تكون الشحنة $0{,}5\,\mu C$

مثال: صفيحتان كبيرتان جداً ومتوازيتان وتحملان شحنتين متساويتين ومتضادتين

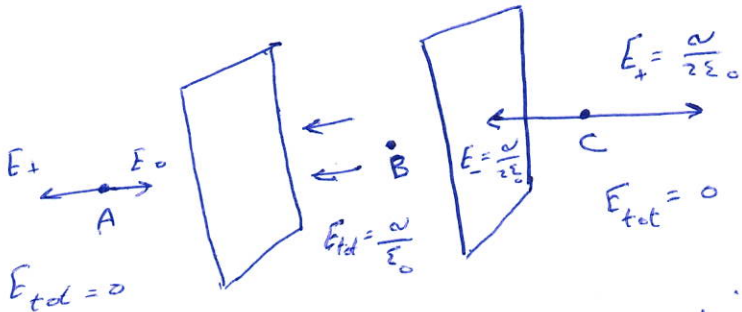
المطلوب: ايجاد الحقل الكهربائي في نقطة تقع بين الصفيحتين وفي نقطة تقع خارجها

الحل: يجب ايجاد الحقل الناتج عن كل صفيحة كما لو أن الأخرى غير موجودة ثم نجمع الحقلين

نعلم أن الحقل الناتج عن صفيحة بمفردها (مستوي لانهائي) هو $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

وتكون اتجاهات الحقول نحو الشحنات السالبة وبعيداً عن الشحنات الموجبة

وبما أن شدة الحقل غير تابعة للبعد عن الصفيحة إذاً الحقول المتساوية بالشدة ومتضادة بالاتجاه تلغي بعضها البعض (وهي شدة الحقل في كل النقاط إلى يمين ويسار الصفيحتين) أما في توزع النقاط الواقعة بين الصفيحتين تكون شدة الحقل الناتج عن كل من الصفيحتين واحدة وفي نفس الاتجاه.



مثال: لوحان متوازيان معدنيان تفصلهما مسافة 3 mm وتحملان كثافتي شحنة متساويتين ومتضادتين هما $(\pm 2 \frac{\mu c}{m^2})$ وقد أطلق بروتون $(m = 1.6\times10^{-27}\,kg, q = e)$ في حالة السكون عند اللوح الموجب مباشرة علماً أن الحيز بين اللوحين فراغاً. ما هي سرعة البروتون قبل أن يصطدم باللوح السالب

الحل: إن معادلة الحركة بالنسبة لتسارع ثابت والمشتقة من قانون نيوتن الثاني هي

$v^2 = v_0^2 + 2aX$ حيث $V_0 = 0$ و $X = 3mm$ أما التسارع a

نحصل عليه من العلاقة $a = \frac{F}{m}$

حيث $F = qE$ ، $q = e$ ⇐ يجب حساب E

ولدينا $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ ونعلم قيمة σ و ϵ_0 وبالتالي نعوض

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{2\times10^{-6}}{8.85\times10^{-12}} = 2.26\times10^{5}\,\frac{N}{C}$$

اما القوة F فهي:
$$F = eE = 1.6 \times 10^{-19} \times 2.26 \times 10^{5} = 3.62 \times 10^{-14}\, N$$

وبذلك يكون التسارع
$$= \frac{3.62 \times 10^{-14}}{1.67 \times 10^{-27}} = 2.17 \times 10^{13}\, m.s^{-2}$$

نعوض في عبارة السرعة نجد
$$v = \sqrt{2ax} = \sqrt{2(2.17 \times 10^{13})(0.003)} = 3.61 \times 10^{5}\, m.s^{-1}$$

نلاحظ أنه على الرغم من أن الشحنة والقوة المؤثرة صغيرتان إلا أن الكتلة الضئيلة للبروتون تسمح له باكتساب سرعة كبيرة جداً

الضغط الكهربائي :