كلية العلوم

القسم : **الكيمياء**

السنة : **الاولى**

المادة : رياضيات عامة٤

المحاضرة : **الثالثة/نظري/**

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

المحدودية: يقول عن متتالية U_n أنها محدودة إذا وجد عدد $M \in \mathbb{R}$ حقق

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad |U_n| \leq M$$

- تكون محدودة من الأعلى أن وجد عدد حقيقي حقق

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad U_n \leq M$$

- تكون محدودة من الأدنى إذا وجد عدد حقيقي حقق

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad M \leq U_n$$

- إذا كانت محدودة من الأعلى والأدنى نقول أنها محدودة.

مثال: من أجل $U_n = 4 - \frac{1}{n}$

حيث $n \geq 1$ أدرس المحدودية

الحل:

ندرس التغيرات على $[1, +\infty[$

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x}$$

$$f(1) = 4 - \frac{1}{1} = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 4 - 0 = 4$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	3	↗	4

ومنه $3 \leq f(x) \leq 4$

$3 \leq U_n \leq 4$

التقاربية: يقول عن U_n أنها متقاربة من عدد a إذا تحققت

تعريف كوشي $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ و $\forall n > n_0 \ |U_n - a|$

مثال: نعلم أن نهاية المتتالية $U_n = \frac{1}{n+1}$ هي a

برهن باستخدام تعريف كوشي

الحل: $|U_n - a| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = \varepsilon$

نفرض $\varepsilon = \frac{1}{n} \Leftarrow |U_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$

حيث $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

$n_0 = \frac{1}{\varepsilon} + 1$

$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

إذا فرضنا $\varepsilon = 0.1$ فإن $n_0 = \frac{1}{0.1} = 10$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$|U_n - a| < 0.1 \quad ; \quad n > 10$

مثال: ما نهاية $U_n = \frac{n+1}{n}$

برهن ذلك

الحل:

$\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$

برهان ذلك

$|U_n - 1| = \left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n+1-n}{n}\right|$

$= \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon$

$\Rightarrow n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

نلاحظ أنه $\forall \varepsilon > 0$

يوجد $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 > 0 \ ; \ 0 < n_0 \ \forall n > n_0 \ [U_n - 1] < \varepsilon$

توضيح إذا أخذنا $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow n_0 = 2$

U_1, U_2 خارج دائرة التقارب

$U_3, U_4, \dots$ داخل دائرة التقارب

$\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} < 1$

عندما $\frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} < 1$ $\quad \varepsilon = 0.2$

$4 - 2 \ 1 < 1$

$\Rightarrow n = \left[\frac{1}{0.2}\right] + 1 = 6$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مبرهنة: المتتالية المتقاربة لها نهاية وحيدة

$U_n=(-1)^n$

ليس لها نهاية

البرهان: نفرض U_n متقاربة ولنبرهن أن نهايتها وحيدة

نفرض أن لها نهايتين a,b

$$|a-b|=|a-U_n+U_n-b|\leq|a-U_n|+|U_n-b|<\varepsilon_1+\varepsilon_2=\varepsilon$$

عندما n تسعى نحو $+\infty$

$|a+b|\leq|a|+|b|$

فإن ε تسعى نحو الصفر

$|a-b|<0 \Rightarrow a=b$

وهذا يعني أن لها نهاية وحيدة

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مكتبة A to Z