كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الثانية**

المادة : ميكانيك تحليلي

المحاضرة : الاولى /نظري/د.علي أسد

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

جامعة طرطوس

كلية العلوم

قسم الفيزياء

مقرر: الميكانيك التحليلي

الفصل الأول: أسس الميكانيك التحليلي

د. علي أسد

أسس الميكانيك التحليلي

- **الارتباطات (القيود):**

تقسم الجمل المادية بالنسبة لتأثير القوى فيها إلى ثلاثة أقسام:

1. **حرة:** لا تؤثر عليها أي قوى مطلقاً (سفينة فضائية بعيدة عن أي مجال جاذب).
2. **طليقة:** تتحرك تحت تأثير قوى فعالة فقط.
3. **مقيدة:** تؤثر عليها بالإضافة إلى القوى الفعالة قوى ناتجة عن ملامستها أجسام مجاورة (قوى توتر الخيط – رد فعل سطح أو سلك). تنعدم عندما تتحرر الجملة من القيد فتصبح طليقة.

عدد درجات الحرية: هو عدد الإحداثيات اللازمة لوصف الجملة فيما لو كانت طليقة مطروحاً منه عدد معادلات الارتباط.

توضيح : نفرض أن الجملة تتألف من جسيم واحد، يحدد موضع هذا الجسيم في الفراغ بالإحداثيات x و y و z أي $M(x,y,z)$.

- نفرض ان هذا الجسم يتحرك على سطح كرة نصف قطرها a فتكون معادلة الارتباط:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0 \qquad (1)$$

فتكون عدد درجات الحرية 2=1-3 (3 عدد الاحداثيات اللازمة لوصف الجملة – 1 معادلة الارتباط).

- نجبر الجسيم على الحركة على دائرة أفقية على سطح الكرة عندئذ تحقق إحداثياته المعادلة التالية:

$$\theta = c_1 \qquad (2)$$

فتكون عدد درجات الحرية 1=2-3 (3 عدد الاحداثات اللازمة لوصف الجملة – 2 معادلتي الارتباط (1) (2)).

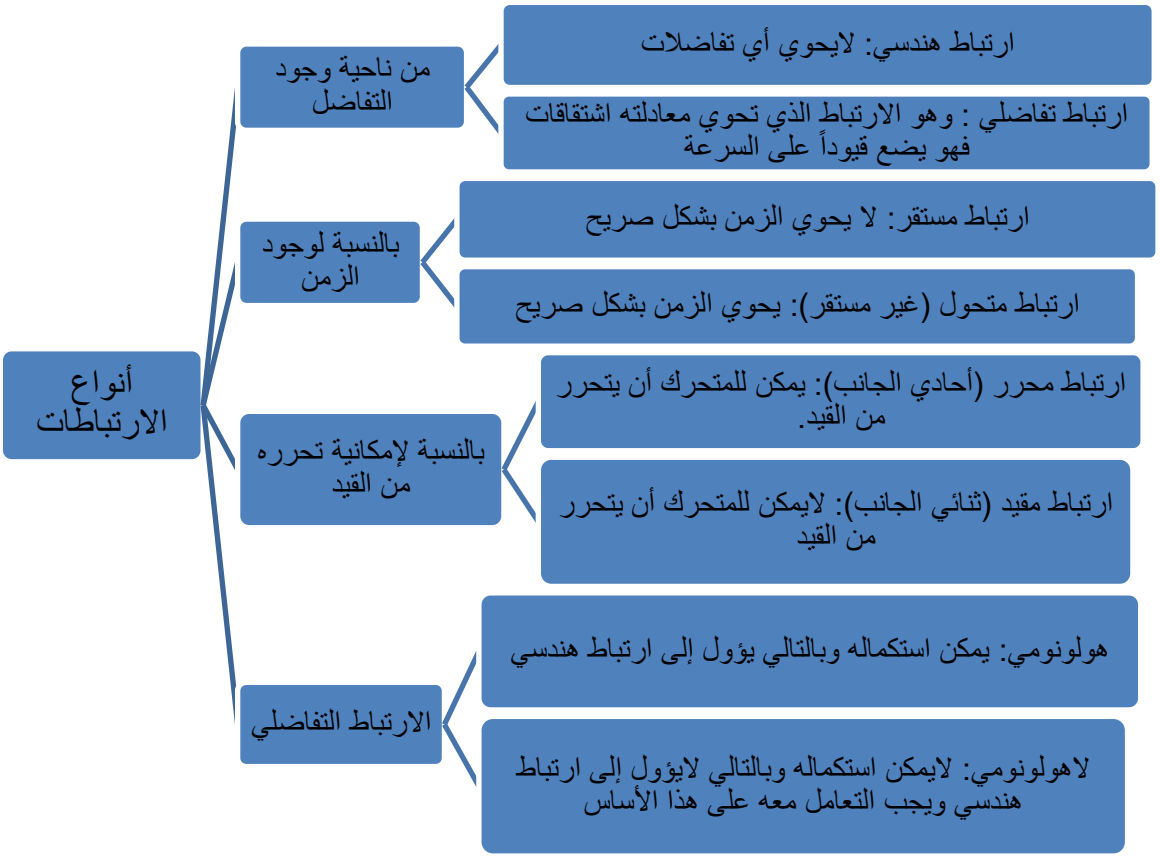
أمثلة:

1. إن عدد درجات الحرية لجملة مادية مؤلفة من N جسيم طليق، معينة بالإحداثي $3N$ ولا تخضع لأي ارتباط هو $3N$، فإذا تأثرت الجملة بـ k ارتباط يصبح العدد $3N - k = s$.
2. يتعين الجسم الصلب الطليق في الفضاء بمعرفة إحداثيات ثلاثة نقاط منه $M_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ، $M_3(x_3,y_3,z_3)$ تعتبر هذه الوسطاء غير مستقلة حيث ترتبط فيما بينها بثلاث علاقات تعبر عن البعد الثابت بين كل نقطتين في الجسم الصلب.

- عدد الوسطاء المستقلة لدراسة هذا الجسم هي ستة فقط وهي: إحداثيات مركز كتلته c $[x(c),y(c),z(c)]$ و زوايا أولر (θ,ψ,φ).

3. ينخفض عدد درجات الحرية في المثال السابق إذا ثبتت نقطة من الجسم الصلب، ويعبر عن الدرجات الثلاثة بزوايا أولر.
4. للحركة المستوية لجسم صلب ثلاث درجات حرية هي مركز كتلته $x(c), y(c)$ وزاوية الدوران حول مركز الكتلة φ.
5. يوجد درجة حرية واحدة لجسم صلب يدور حول محور ثابت هي زاوية الدوران φ.

أنواع الارتباطات:



سؤال: عرف الانتقال الافتراضي وماهي العلاقة التي يحققها هذا الانتقال في حالة جسم يتحرك على سطح معادلته: $f(x, y, z, t) = c$.

الانتقال الافتراضي: هو انتقال يحدث بثبات الزمن ويرمز له بـ $\overrightarrow{\delta r}$.

لنفرض انتقالاً افتراضياً $\overrightarrow{\delta r}$ مركباته $(\delta x, \delta y, \delta z)$ يحدث في اللحظة t وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = c \qquad (3)$$

بالنشر نجد:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = c \qquad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = \overrightarrow{grad} f \overrightarrow{\delta r} = 0 \qquad (5)$$

أي أن $\overrightarrow{\delta r}$ يتعامد مع الناظم على السطح المدروس.

- كيف تصبح العلاقة السابقة إذا كان الارتباط محرراً حيث يمكن للجسم أن ينفك عن السطح؟.

تصبح العلاقة (4) بالشكل الآتي:

$$f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = c + \delta c \qquad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = \overrightarrow{grad} f \overrightarrow{\delta r} = \delta c \qquad (7)$$

- كيف تصبح العلاقة في حالة الانتقال الحقيقي $\overrightarrow{dr}$ الذي يحدث بفعل القوة $\vec{F}$ المؤثرة على الجسم؟

$$\overrightarrow{grad} f \overrightarrow{dr} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \qquad (8)$$

متى يمكن أن تطابق العلاقتان (5) و (8) معاً؟

تطابق العلاقتان عندما لا تحوي معادلة الارتباط الزمن بشكل صريح وبالتالي يمكن أن نجد انتقالاً افتراضياً $\overrightarrow{\delta r}$ ينطبق على انتقال حقيقي $\overrightarrow{dr}$.

مثال: تتحرك نقطة مادية (حلقة) على محور Δ يدور بسرعة زاوية ثابتة حول المحور الشاقولي الثابت oz المتعامد مع المستوي. اكتب معادلات الارتباط وعين كل من الانتقالين الافتراضي والحقيقي.

نحدد موضع الحلقة M في الفضاء بالاحداثيات الاسطوانية $M(\rho, \varphi, z)$.

يجب أن تعبر معادلة الارتباط الأولى عن أن الحلقة تبقى في المستوي xoy وبالتالي يكون:

$$z = 0$$

أما المعادلة فيجب أن تؤكد أن M تبقى على المحور Δ فهي تحقق معادلته أي:

$$\varphi - \omega t = 0$$

الانتقال الافتراضي $\overrightarrow{\delta r}$ فمركباته $\delta\rho, \rho\delta\varphi, \delta z$ وهي كما يلي:

$$\rho\delta\varphi = 0, \qquad \delta z = 0, \qquad \delta\rho \neq 0$$

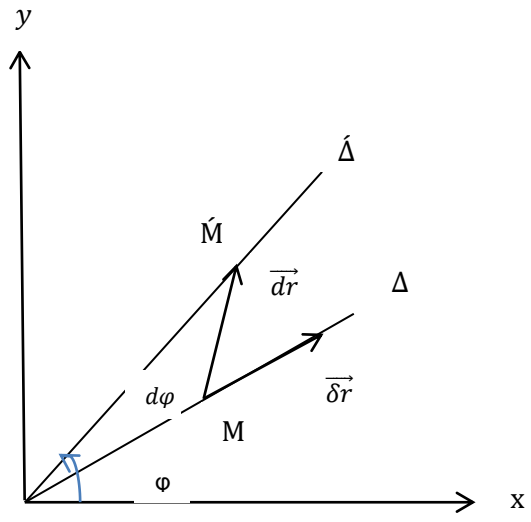
ولكن الانتقال الحقيقي $\overrightarrow{dr}$ سيختلف عن الافتراضي، لأن معادلة الارتباط الثابتة تتبع الزمن بشكل صريح، وهو:

$$\rho d\varphi = \rho\omega dt \neq 0, \qquad dz = 0, \qquad \mathrm{d}\rho \neq 0$$

وبالتالي يكون له مركبتان:

الأولى: على $\overrightarrow{e_\rho}$ (متجه الواحدة المقابل لتزايد ρ) وهي $\mathrm{d}\rho$.

الثانية: على $\overrightarrow{e_\varphi}$ (متجه الواحدة المقابل لتزايد φ) وهي $\rho\mathrm{d}\varphi$.



عدد درجات الحرية 1=2-3

سؤال: عرف كلاً من العمل الافتراضي العنصري – الارتباط المثالي. ثم اكتب علاقات العمل الافتراضي والعمل الحقيقي للقوى في المثال السابق.

العمل الافتراضي العنصري: للقوة $\vec{F}$ المؤثرة في جسيم $M(x,y,z)$ يعطى بالعلاقة التالية:

$$\delta A = \vec{F}\overrightarrow{\delta r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z \qquad (9)$$

الارتباط المثالي: هو الارتباط الذي يكون فيه العمل الافتراضي العنصري لرد الفعل يساوي الصفر.

العمل الافتراضي العنصري للقوة $\vec{F}$ المؤثرة في الحلقة M:

$$\delta A(\vec{F}) = F_\rho\delta\rho \qquad (10)$$

العمل العنصري الحقيقي:

$$\mathrm{d}A(\vec{F}) = \vec{F}\overrightarrow{dr} = F_\rho d\rho + F_\varphi\rho d\varphi = F_\rho d\rho + F_\varphi\rho\omega dt \qquad (11)$$

العمل الافتراضي العنصري لرد الفعل:

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R}\delta\vec{r} \qquad (12)$$

- من الواضح أنه إذا لازمت نقطة مادية سطحاً صقيلاً فإن رد الفعل يكون عمودياً ويكون الانتقال دوماً على السطح وبالتالي ينعدم عمل رد الفعل $\vec{R}\delta\vec{r} = 0$ أما إذا وجد احتكاك فيكون لرد الفعل مركبة مماسية عملها لا يساوي

الصفر في الحالة العامة. وهكذا نقول أن السطح الصقيل يمثل ارتباطاً مثالياً. ونلاحظ أن العمل الحقيقي لرد الفعل في هذه الحالة يساوي الصفر أيضاً، ولكنه لا يساوي الصفر إذا كان الارتباط متحولاً.

مثال لتوضيح ما سبق:

يتحرك مستوٍ أفقي صقيل باتجاه المحور oz بسرعة ثابتة u بينما تتحرك عليه نقطة مادية عين العمل الفتراضي والحقيقي لرد الفعل

ان معادلة الارتباط هي معادلة المستوي: أي

$$z = ut$$

ومنه :

$$\delta z = 0\,, \quad dz = udt \neq 0$$

ان رد الفعل شاقولي دوماً أي: $R_x = R_y = 0 \;\; , R_z = R \neq 0$ وبالتالي فالعمل الافتراضي لرد الفعل هو:

$$\delta A(\vec{R}) = \vec{R}\delta\vec{r} = R_z\delta z = 0$$

أما العمل الحقيقي لرد الفعل فهو:

$$\mathrm{d}A(\vec{R}) = \vec{R}d\vec{r} = Rdz = Rudt \neq 0$$

سؤال: برهن أن الشرط اللازم والكافي لتوازن مجموعة مادية خاضعة لارتباطات مثالية ثنائية الجانب ومستقرة أن يكون مجموع الأعمال الافتراضية الجزئية للقوى الفعالة يساوي الصفر وبالتالي تتحقق العلاقة:

$$\boldsymbol{\delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\, \delta\vec{r}_i \;= 0} \qquad \boldsymbol{(13)}$$

- إن توازن الجملة ككل يعني أن كل نقطة M_i تتأثر بقوتين: الأولى محصلة القوى الفعالة $\vec{F}_i$ والثانية $\vec{R}_i$ محصلة القوى الناتجة عن الارتباط (قوى رد الفعل).
- بما ان الجملة متوازنة يكون:

$$\vec{F}_i + \vec{R}_i = 0$$

- بالضرب بـ $\delta\vec{r}_i$ ثم الجمع بـ i نجد:

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_i + \vec{R}_i).\,\delta\vec{r}_i = 0 \qquad (14)$$

- بما أن الارتباط مثالي فلابد أن ينعدم الحد الثاني أي:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i.\,\delta\vec{r}_i = 0$$

وبالتالي يكون:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i = 0$$

وهو المطلوب.

سؤال: كيف يصبح شرط التوازن عندما تتأثر الجملة بارتباطات أحادية الجانب يمكن أن تتحرر نقطها من القيد؟

تتحرر النقطة من القيد باتجاه رد الفعل وبالتالي يكون عمل رد الفعل موجباً أي أن:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i . \delta\vec{r}_i > 0$$

طبقاً لـ (14) نجد:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i < 0 \qquad (15)$$

وهو شرط توازن الجمل المادية المحررة. ويمكن جمع الشرطين بشرط واحد هو:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \delta\vec{r}_i \leq 0 \quad (16)$$

- تأخذ إشارة المساواة للارتباطات الثنائية.
- تأخذ إشارة المتراجحة للارتباطات الأحادية.
- تعبر العلاقة الرياضية السابقة عن المبدأ التوازني للانتقالات الافتراضية: إن العمل الافتراضي للقوى الفعالة المؤثرة على مجموعة مادية متوازنة خاضعة لارتباطات مثالية مستقرة لا يمكن أن يكون موجباً.

توازن نقطة مادية على أساس مضاريب لاغرانج (دراسة الحركة وفق عوامل مساعدة):

لنفرض أن النقطة المادية تتحرك على سطح معادلته $f(x,y,z) = 0$ (ارتباط هندسي) تنجز انتقالاً افتراضياً فهي تحقق $\overrightarrow{grad} f \overrightarrow{\delta r} = 0$، نضرب الطرفين بـ λ ونجمعها مع عبرة العمل الافتراضي $\vec{F}.\overrightarrow{\delta r} = 0$ فنجد:

$$\vec{F}.\overrightarrow{\delta r} + \lambda \overrightarrow{grad} f \overrightarrow{\delta r} = 0 \quad (17)$$

يعود الحد الأول للقوى الفعالة بينما يمثل الحد الثاني الارتباط (قوى رد الفعل)

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0$$

وبالتالي:

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta z = 0 \quad (18)$$

ملاحظات:

- المتحولات x و y و z مرتبطة والمعادلة (18) لا يمكن فصلها
- تم إدخال الوسيط كعامل مساعد لحل هذه المشكلة لذلك نختار نحن أي قوس من الأقواس الثلاثة وفق λ ونساويه بالصفر، مثلاً:

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

y و z متحولين مستقلين فيما بينهما وبالتالي:

$$F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

$$F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (21)$$

نضيف إلى جملة المعادلات $(19 - 21)$ معادلة الارتباط $f(x, y, z) = 0$ فنحصل على أربع معادلات كافية لحساب أربع مجاهيل هي x و y و z و الوسيط λ

ملاحظات:

- الاحداثيات مرتبطة مع بعضها البعض ومتشابكة وتم إدخال الوسيط λ لفصل الاحداثيات عن بعضها.
- λ يسمى مضروب لاغرانج من أجل نقطة مادية واحدة، بينما λ_i هي مضاريب لاغرانج من أجل مجموعة مادية.

<u>تعميم:</u>

إذا تحركت النقطة المادية على منحني (سلك مثلاً) ناتج عن تقاطع سطحين معرفين بالمعادلتين:

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad i = 1,2$$

وبالتالي نحن بحاجة إلى وسيطين λ_1 و λ_2 بحيث يتحقق:

$$\lambda_1 \overrightarrow{grad} f_1 \overrightarrow{\delta r} + \lambda_2 \overrightarrow{grad} f_2 \overrightarrow{\delta r} = 0$$

وبالتالي:

$$\vec{F}.\overrightarrow{\delta r} + \lambda_1 \overrightarrow{grad} f_1 \overrightarrow{\delta r} + \lambda_2 \overrightarrow{grad} f_2 \overrightarrow{\delta r} = 0 \quad (22)$$

باتباع نفس الخطوات السابقة والاصلاح والجمع نحصل على جملة المعادلات:

$$F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

$$f_i(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad i = 1,2 \qquad (26)$$

وهي خمس معادلات كافية لحساب خمس مجاهيل هي x و y و z (إحداثيات وضع التوازن) و الوسيطين λ_1 و λ_2

<u>سؤال:</u> في جملة مؤلفة من n نقطة، خاضعة لمجموعة من القوى الفعالة $\vec{F}_i$ وقوى ربط $\vec{R}_i$ والارتباطات k حيث معادلة الارتباط $f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0$; $\alpha = 1, 2, \dots, k$. تحت تأثير هذه القوى تتحرك كل نقطة من الجملة بتسارع $\vec{a}_i$ والمطلوب:

1. **إيجاد المعادلات التفاضلية لهذه الجملة.**
2. **ماهو عدد هذه المعادلات؟**

نكتب معادلة كل نقطة مادية في المجموعة باعتبارها تتأثر بقوى فعالة محصلتها $\vec{F}_i$ وقوى ربط $\vec{N}_i$ وبنتيجة ذلك تتحرك هذه النقطة بتسارع $\vec{a}_i$ وبالتالي يكون:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \qquad (27)$$

ولدينا:

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \qquad (28)$$

نعوضها في المعادلة فنحصل على معادلة الحركة التالية:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \qquad (29)$$

وباسقاط هذه المعادلة على المحاور الاحداثية نحصل على معادلات لاغرانج من النوع الأول:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \qquad (30)$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} \qquad (31)$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} \qquad (32)$$

وهي عبارة عن 3n معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وباضافة معادلات الارتباط وعددها k نحصل على 3n+k معادلة.

سؤال: في جملة مؤلفة من n نقطة، خاضعة لمجموعة من القوى الفعالة $\vec{F}_i$ وقوى ربط $\vec{R}_i$ والارتباطات k حيث معادلة الارتباط $f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \; ; \alpha = 1, 2, \dots, k$. انطلاقاً من هذه المعادلة اكتب:

1. **المعادلة التفاضلية التي تحققها الانتقالات الافتراضية.**
2. **المعادلة التفاضلية التي تحققها الانتقالات الحقيقية.**
3. **متى يتساوى الطلبان الأول والثاني؟**
4. **عندما تكون محصلة عمل قوى رد فعل الارتباط وفقاً لانتقالات افتراضية لنقاط المجموعة يساوي الصفر أكتب المعادلة المعبرة عن ذلك وماذا يسمى الارتباط في هذه الحالة؟**

1. المعادلة التفاضلية للانتقالات الافتراضية: $\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i f_\alpha \, \delta\vec{r}_i = 0$.
2. وللانتقالات الحقيقية: $\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i f_\alpha \, d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0$.
3. يتساوى الطلبان السابقان عند ثبات الزمن أي عندما $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$ أي أن f_α غير تابع للزمن.
4. نسمي هذا الارتباط بالارتباط المثالي:

$$\delta A = \sum_i \vec{N}_i . \delta\vec{r}_i = 0$$

سؤال: بفرض جملة مؤلفة من n نقطة مادية. انطلاقاً من معادلات لاغرانج من النوع الأول أثبت صحة العلاقة:

$$\sum_{i}^{n} m_i \left(\dot{X}_i d\dot{X}_i + \dot{Y}_i d\dot{Y}_i + \dot{Z}_i d\dot{Z}_i \right) = dT$$

حيث T الطاقة الحركية.

تعطى معادلة لاغرانج من النوع الأول بالشكل:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}$$

$$m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}$$

نضرب كلاً من المعادلات السابقة بـ dx_i و dy_i و dz_i على الترتيب:

$$m_i\ddot{x}_i dx_i = F_{ix}dx_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i$$

$$m_i\ddot{y}_i dy_i = F_{iy}dy_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i$$

$$m_i\ddot{z}_i dz_i = F_{iz}dz_i + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i$$

الآن نجمع على i ثم نقوم بجمع المعادلات السابقة طرفاً إلى طرف فنحصل على:

$$\sum_i (m_i\ddot{x}_i dx_i + m_i\ddot{y}_i dy_i + m_i\ddot{z}_i dz_i)$$

$$= \sum_i (F_{ix}dx_i + F_{iy}dy_i + F_{iz}dz_i)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i\right) \qquad (*)$$

الآن نحسب الحدود الثلاثة الأولى (الطرف الأيسر من المعادلة السابقة).

<u>ملاحظة:</u>

$$\ddot{x}_i = \frac{d\dot{x}_i}{dt} \implies \ddot{x}_i dx_i = \frac{d\dot{x}_i}{dt} dx_i$$

$$\implies \ddot{x}_i dx_i = \frac{dx_i}{dt} d\dot{x}_i$$

$$\implies \ddot{x}_i dx_i = \dot{x}_i d\dot{x}_i$$

وبشكل مماثل نجد:

$$\ddot{y}_i dy_i = \dot{y}_i d\dot{y}_i \quad ; \quad \ddot{z}_i dz_i = \dot{z}_i d\dot{z}_i$$

فتصبح العلاقة بالشكل:

$$\sum_i m_i (\dot{x}_i d\dot{x}_i + \dot{y}_i d\dot{y}_i + \dot{z}_i d\dot{z}_i) = \cdots$$

ملاحظة:

$$\dot{x}_i d\dot{x}_i = \frac{1}{2} d\dot{x}_i{}^2 = \frac{1}{2} dv_i{}^2$$

$$\dot{y}_i d\dot{y}_i = \frac{1}{2} d\dot{y}_i{}^2 = \frac{1}{2} dv_i{}^2$$

$$\dot{z}_i d\dot{z}_i = \frac{1}{2} d\dot{z}_i{}^2 = \frac{1}{2} dv_i{}^2$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد:

$$\sum_i m_i \left(\dot{x}_i d\dot{x}_i + \dot{y}_i d\dot{y}_i + \dot{z}_i d\dot{z}_i\right) = \frac{1}{2} d\left(\sum_i m_i v_i{}^2\right) = dT$$

سؤال: استنتج قانون مصونية الطاقة لهذه المجموعة المادية

نحسب الحدود الثلاثة الأولى من الطرف الأيمن من المعادلة (*): بفرض أن القوى المؤثرة على المجموعة هي قوى كمونية تشتق من كمون V يتبع إحداثيات النقط (x_i, y_i, z_i)

$$\sum_i (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i) = -\sum_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial V}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial V}{\partial z_i} dz_i\right) = -dV$$

أما الحدود الثلاثة الأخيرة من الطرف الأيمن من المعادلة (*) فيمكن كتابتها بالشكل:

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i} dz_i\right)$$

وهذا يساوي طبقاً للمعادلة $\sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i f_\alpha \, d\vec{r}_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt = 0$

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \sum_{i=1}^{n} \vec{\nabla}_i f_\alpha \, d\vec{r}_i = -\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$$

بالتعويض في * نجد:

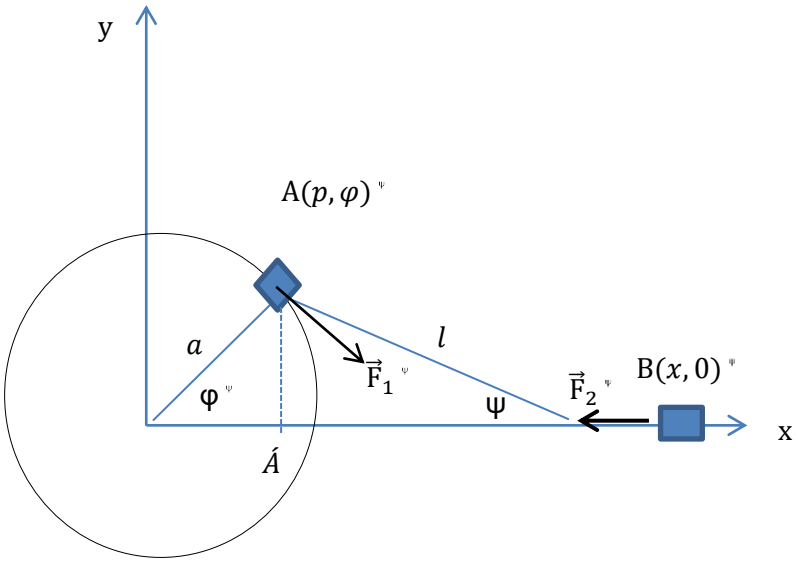
$$dT = -dV - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} dt$$

وبفرض أن الارتباطات مستقرة فإن الحد الأخير يساوي الصفر وهكذا نحصل على قانون مصونية الطاقة لهذه المجموعة المادية وهو التالي:

$$d(T+V)=0 \quad \Rightarrow \quad T+V=E$$

<u>مسألة (1):</u> لتكن الجملة المبينة بالشكل حيث B مكبس يتحرك ضمن اسطوانة وهو متصل بذراع طوله l ينتهي بصامولة A وقد ثبت فيها مفصلياً بذراع OA آخر طوله a طرفه الآخر مثبت في نقطه ثابته o.

1. **أوجد معادلات الارتباط ثم استنتج عدد درجات الحرية واحسب الانتقال الافتراضي وأوجد العلاقة بين القوتين F_1 و F_2 لكي يتم توازن الجملة.**



<u>الحل:</u> تتألف الجملة بصورة عامه من نقطتين المكبس $B(x,0)$ والصامولة $A(\rho,\varphi)$.

المكبس B يتحرك حصراً وفقط وفق المحور ox (هذا مقيد) ومعادلة المحور ox هي $y=0$.

أما الصامولة فتتحرك بحيث يبقى $\rho = a$ ثابتاً (هذا مقيد).

وهذا يعني عدد درجات الحرية في الجملة: 3-2=1.

الانتقال الفتراضي: (يجب ان نعبر عن δx بدلالة $\delta\varphi$ لهذا الغرض نوجد عبارة x بدلالة φ ثم نفاضل الطرفين:

$$\overline{OB} = \overline{O\acute{A}} + \overline{\acute{A}C} + const$$

$$= a\cos\varphi + l\cos\psi + const$$

من تشابه المثلثات نجد:

من المثلث AOC نجد:

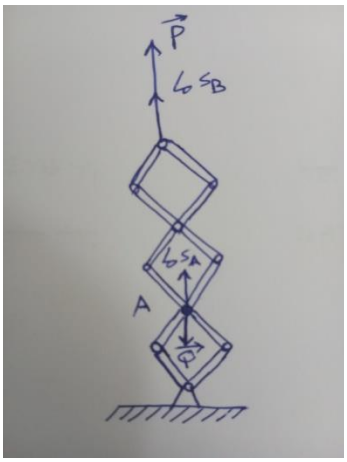
$$a\,sin\,\varphi = l\sin\psi \;\Longrightarrow \sin\psi = \frac{a}{l}sin\,\varphi$$

$$\cos\psi = \sqrt{1-\sin^2\psi} = \sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}sin^2\,\varphi}$$

$$\Longrightarrow \overline{OB} = x = a\cos\varphi + l\sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}sin^2\,\varphi} + const$$

$$\delta x = -a\sin\varphi + \frac{\frac{a^2}{l}\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{a^2}{l^2}sin^2\,\varphi}}$$

مسألة (2): أوجد العلاقة بين القوتين P و Q في الآلة الرافعة المبينة في الشكل وذلك في حالة التوازن.



الحل: بإعطاء المجموعة انتقالاً افتراضياً (إزاحة افتراضية)، فإن جميع أقطار متوازيات الأضلاع المكونة من القضبان تستطيل بمقدار واحد قدره δs ويكون عندئذٍ: $\delta s_B = 3\delta s$ و $\delta s_A = \delta s$ وحسب مبدأ العمل الافتراضي:

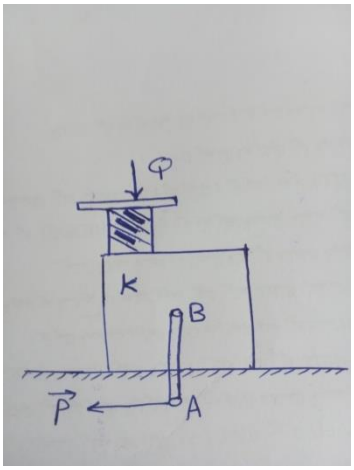
$$\sum_i \delta A_i = \sum_i \vec{F}_i\,\delta\vec{r}_i = 0$$

$$\vec{P}\,\overrightarrow{\delta s_B} + \vec{Q}\,\overrightarrow{\delta s_A} = 0$$

بإسقاط هذه المعادلة على محور شاقولي موجه نحو الأعلى نجد:

$$(3P - Q)\delta s = 0 \Rightarrow Q = 3P$$

مسألة (3): أوجد العلاقة بين القوتين P و Q في الآلة الرافعة التي وضعت أجزاؤها في العلبة k إذا علمت أن لولب (القلاووظ) D يرتفع بمسافة h عند دوران الذراع AB علماً أن $AB = l$



الحل: ترسم النقطة A قوساً من دائرة عند إعطائها انتقالاً افتراضياً قدره δr_A أي أن $\delta r_A = l\delta\varphi$ حيث $\delta\varphi$ انتقال افتراضي للزاوية φ ويرتفع عندئذٍ الثقل Q مسافة قدرها δs للأعلى ويكون حسب مبدأ العمل الافتراضي:

$$\sum_i \delta A_i = \vec{P}\,\overrightarrow{\delta r_A} + \vec{Q}\,\overrightarrow{\delta s}$$

نحصل بالإسقاط (انتقال القوة $\vec{P}$ يكون عكس انتقال القوة $\vec{Q}$) على:

$$P\,\delta r_A - Q\delta s = 0$$

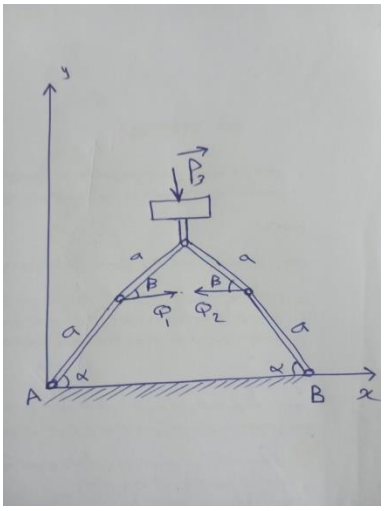
$$P\,l\delta\varphi - Q\delta s = 0 \;\Rightarrow pl\delta\varphi = Q\delta s$$

نوجد العلاقة بين $\delta\varphi$ و δs كما يلي:

عندما يدور الذراع AB زاوية $\delta\varphi$ فإن القوة Q ترتفع بمقدار δs وعندما يدور الذراع AB زاوية (دورة كاملة) 2π ترتفع القوة بمقدار h

$$\frac{\delta\varphi}{2\pi}=\frac{\delta s}{h}\Rightarrow\delta\varphi=2\pi\frac{\delta s}{h}\ \ \Rightarrow pl\,2\pi\frac{\delta s}{h}=Q\delta s\ \Rightarrow Q=\frac{2\pi l}{h}P$$

<u>مسألة (4):</u> عين في المكبس المبين في الشكل العلاقة بين القوى P_3 , Q_2 , Q_1 في حالة الاتزان علماً أن $Q_1=Q_2=Q$ وأن الزاويتان α و β معلومتان، أهمل أوزان القضبان.



<u>الحل:</u> نستخدم شرط التوازن (حسب مبدأ العمل الافتراضي)

$$\sum_i \vec{F_i}\,\delta\vec{r_i}=0$$

نختار نقطة مبدأ الاحداثيات في النقطة الثابتة A فيكون شرط التوازن وفقاً للمساقط على x و y :

$$Q_{1x}\delta x_1+Q_{2x}\delta x_2+P_{3y}\delta y_3=0 \qquad (*)$$

وذلك لأن المساقط الأخرى للقوى تساوي صفراً ولتعيين δx_1 و δx_2 و δy_3 نحسب الإحداثيات x_1 و x_2 و y_3 لنقاط تأثير القوى بالتعبير عنها بدلالة الزاويتين α و β ونحصل إذا رمزنا لطول كل قضيب بالرمز a على:

$$x_1=a\cos\alpha\ \ ,\ \ x_2=a\cos\alpha+2\,a\cos\beta\ \ ,\ \ y_3=a\left(\sin\beta+\sin\alpha\right)$$

نحصل بتفاضل هذه العلاقات على:

$$\delta x_1=-a\sin\alpha\ \delta\alpha\ \ ,\ \ \delta x_2=-a(\sin\alpha\ \delta\alpha+2\sin\beta\,\beta\delta\,)$$

$$\delta y_3=a\left(\cos\beta\ \delta\beta+\cos\alpha\ \delta\alpha\right)$$

بالتعويض في $*$ مع الأخذ بالحسبان أن $Q_{1x}=Q$ و $Q_{2x}=-Q$ و $P_{3y}=-P$ نحصل على:

$$-Qa\sin\alpha\ \delta\alpha+Q\ a\ \sin\alpha\ \delta\alpha+2aQ\ \sin\beta\,\beta\delta-Pa\left(\cos\beta\ \delta\beta+\cos\alpha\ \delta\alpha\right)=0$$

$$2aQ\ \sin\beta\,\beta\delta-Pa\left(\cos\beta\ \delta\beta+\cos\alpha\ \delta\alpha\right)=0 \qquad (**)$$

لتعيين العلاقة بين $\delta\alpha$ و $\beta\delta$ نستفيد من كون المسافة $AB=const$ في حالتنا هذه، وبالتالي:

$$2a(\cos\alpha+\cos\beta)=const$$

نحصل من تفاضل هذه المعادلة على:

$$\sin\alpha\,\delta\alpha + \sin\beta\,\delta\beta = 0 \quad \Rightarrow \delta\alpha = -\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,\delta\beta$$

بالتعويض في (**) نجد:

$$2Q\ \sin\beta - P\left(\cos\beta - \cot\alpha\ \sin\beta\right) = 0$$

ومنها:

$$P = \frac{2Q}{\cot\beta - \cot\alpha}$$

نلاحظ أن الضغط يكون كبيراً جداً عندما تكون β قريبة من α