كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : هندسة تحليلية

المحاضرة : الثانية/عملي/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

2025

يمكنكم طلب المحاضرات برسالة نصية (SMS) أو عبر(What's app-Telegram)على الرقم 0931497960

تمرين 1 : أكتب المعادلة القطبية للمنحني الديكارتي

$y = x\sqrt{\frac{x}{2R-x}}$

حيث R عدد ثابت

الحل : نعلم أن

نعوض في المعادلتين $\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \end{cases}$

$\rho\cdot\sin\theta = \rho\cdot\cos\theta\sqrt{\frac{\rho\cos\theta}{2R-\rho\cos\theta}}$

نربع الطرفين للتخلص من الجذر :

$(\rho\cdot\sin\theta)^2 = (\rho\cdot\cos\theta)^2\left(\sqrt{\frac{\rho\cos\theta}{2R-\rho\cos\theta}}\right)^2$

$(\rho\cdot\sin\theta)^2(2R-\rho\cos\theta) = (\rho\cdot\cos\theta)^2\cdot(\rho\cdot\cos\theta)$

$(\rho^2\cdot\sin^2\theta)(2R-\rho\cos\theta) = \rho^2\cdot\cos^2\theta\cdot(\rho\cdot\cos\theta)$

$\sin^2\theta(2R-\rho\cos\theta) = \rho\cos^3\theta$

$2R\sin^2\theta - \rho\cos\theta\sin^2\theta = \rho\cos^3\theta$

$$2\rho\sin^2\theta = \rho\cos\theta\,(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1})$$

$$\longrightarrow 2\rho\sin^2\theta = \rho\cos\theta$$

$$\longrightarrow \rho = \frac{2\rho\sin^2\theta}{\cos\theta}$$ وهي المعادلة القطبية للمنحني

- وظيفة: أكتب المعادلة الديكارتية للمنحني القطبي

$$\rho = \frac{\sin\theta}{4+\cos\theta}$$

تذكر: العلاقات الإحداثيات الأسطوانية:

$$M(r,\theta,\theta) \longrightarrow M(x,y,z)$$

$$x = r\sin\theta\cdot\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta\cdot\sin\theta$$

$$z = r\cos\theta$$

مثال: ① أوجد إحداثيات النقطة M التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة AB علماً أن $A(1,\frac{\pi}{2},2)$ أسطوانية، و $B(2\sqrt{3},0,\frac{\pi}{3})$ كروية

الحل:

$$A(\rho,\theta,z) = (1,\frac{\pi}{2},2)$$

$$x = \rho\cos\theta = 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 1\cdot 0 = 0$$

$$y = \rho\sin\theta = 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} = 1\cdot 1 = 1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$z = 2$

مساقط الإحداثيات الكروية لـ A هي :

$A(0, 1, 2)$

$B(r, \theta, \phi) = (2\sqrt{3}, 0, \frac{\pi}{3})$

$x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\phi = 2\sqrt{3} \cdot \sin(0) \cdot \cos(0) = 0$

$y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\phi = 2\sqrt{3} \cdot \sin(0) \cdot \sin(0) = 0$

$z = r \cdot \cos\theta = 2\sqrt{3} \cdot \cos(0) = 2\sqrt{3}$

$B(2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3})$ بالكارتيزية

M نقطة منتصف القطعة المستقيمة AB

$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 0}{2} = \sqrt{3}$

$y_m = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$

$z_m = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}$

$M(\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1+\sqrt{3})$ أي أن

(2) أوجد الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$

$\cos(\hat{A}, \hat{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{(0,1,2)(\sqrt{3},0,2\sqrt{3})}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{15}}$

$= \frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{5}$

تذكير :

$|A| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

3) أحسب مساحة المثلث OAB

$$S = \frac{1}{2}|\vec{A}\wedge\vec{B}|$$

$$|\vec{A}\wedge\vec{B}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2\sqrt{3}-0) - \vec{j}(0-2\sqrt{3}) + \vec{k}(0-\sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{3}\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j} - \sqrt{3}\vec{k} = |2\sqrt{3}\vec{i}| + |2\sqrt{3}\vec{j}| - |\sqrt{3}\vec{k}|$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3})^2}$$

$$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

ملاحظة: سؤال اضافي:

برهن أن u_1, u_2, u_3 تكون أساساً

$$u_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$u_2 = 3\vec{i} - 4\vec{k}$$

$$u_3 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

(المطلوب): أوجد الزاوية بين المتجهين u_2 و v_3

أوجد جيب تمام الزاوية للمتجه u_3

أثبت أن المثلث الواقع على المتجهين u_1 و u_3 قائم ثم أوجد مساحته

اوجد مجموعة المتجهات المرسوم على (u_1, u_2, u_3)

الحل: (1)

$$\cos(\hat{u_2}, u_3) = \frac{u_2 \cdot v_3}{|u_2||v_3|} = \frac{-1}{5\sqrt{3}}$$

(2) $\vec{u_3} = (1, 1, 1)$

p q r

جيوب التمام:

$$\alpha = \pm \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\beta = \pm \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma = \pm \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) حتى يكون المثلث القائم يجب اثبات أن u_1 و u_3 متعامدان

حاصل الضرب (هو الكبير، لكي = 0)

$$u_1 \cdot u_3 = (1, 2, 3)(1, 1, 1)$$

$$= 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0$$

المثلث قائم $u_1 \perp u_3$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

مساحة:

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{V_1} \wedge \vec{V_3}\right|$$

$$\vec{V_1} \wedge V_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$\left|\vec{V_1} \wedge \vec{V_3}\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2 - (1)^2} = \sqrt{25 + 16 - 1} = \sqrt{42}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{42}$$

مساحة متوازي السطوح:

$$v = \frac{1}{6}\left|(V_1, V_2, V_3)\right|$$

مساحة مختلط

$$\left|(V_1, V_2, V_3)\right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

TEL:0931497960 - Facebook Group: A to Z مكتبة

$\Rightarrow$ $\frac{1}{6} = |\cdot| = \frac{1}{6}$

التمرين 4 : أثبت أن المتجهات التالية تقع في مستوٍ واحد:

$\vec{V_1} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{V_2} = \vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{V_3} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$

ملاحظة: لإثبات أن المتجهات تقع على استقامة واحدة أو تقع في مستوٍ واحد نوجد المحدد الذي لديه وبين أن قيمته تساوي الصفر

$$(\vec{V_1}, \vec{V_2}, \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -6 & 2 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

بالتالي المتجهات في مستوٍ واحد

وضيفة

التمرين 5 : أثبت أن النقاط التالية تقع على استقامة واحدة أو في مستوٍ واحد

$M_1(1, 6, 3)$ $M_2(2, -18, -6)$

$M_3(3, -2, -4)$ $M_4(4, 4, 7)$