كلية العلوم

القسم : **الفيزياء**

السنة : **الاولى**

المادة : تحليل رياضي٢

المحاضرة : الاولى/نظري/

{{ مكتبة A to Z }}

Facebook Group : مكتبة A to Z

التكاملات غير المحددة:

لتكن I مجالاً ما من R و ليكن $f: I \to R$ دالة مستمرة على I، يقول أن $F: I \to R$ أحد دوال (توابع) أصلية لـ f إذا وفقط إذا كانت اشتقاقية على I و تحقق $F(x)' = f(x)$

مثال: $f(x) = x^2$ معرفة على R التابع الأصلي لها $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

لأن: $F'(x) = \frac{1}{3}(3x^2) + 0$

$= x^2 = f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$

نتيجة: إذا كانت $F(x)$ تابع أصلي أو دالة أصلية لـ $f(x)$ على المجال I عندئذٍ $F(x) + c$ دالة أصلية لـ f

مبرهنة: إذا كان $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دالتين أصليتين لـ $f(x)$ على المجال I عندئذٍ الفرق بينهما عدداً ثابتاً أي $F_1(x) - F_2(x) = c$

تعريف: إذا كان $F(x)$ تابع أصلي لـ $f(x)$ على I عندئذٍ مجموعة التوابع $F(x) + c$ حيث $c \in R$ مجموعة التوابع الأصلية للتابع f على I

1) $\int x^n d(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ 2) $\int \frac{1}{x} d(x) = \ln(x) + c$

(3) $\int a^x \, d(x) = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$ (4) $\int e^x \, d(x) = e^x + C$

(5) $\int \sin x \, d(x) = -\cos x + C$ (6) $\int \cos x \, d(x) = \sin x + C$

(7) $\int \frac{d(x)}{\cos^2 x} = \int (1 + \tan^2(x)) = \tan x + C$

(8) $\int \frac{d(x)}{\sin^2 x} = \int (1 + \cot(x)^2) = -\cot x + C$

(9) $\int sh(x) \, d(x) = ch(x) + C$

(10) $\int ch(x) \, d(x) = sh(x) + C$

(11) $\int \frac{d(x)}{ch(x)^2} = th(x) + C$

(12) $-\int \frac{dx}{sh(x)^2} = -cth(x) + C$

(13) $\int \frac{d(x)}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$

(14) $-\int \frac{d(x)}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(15) $-\int \frac{d(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

(16) $\int \frac{d(x)}{\sqrt{x^2 \mp a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \mp a^2} \right| + C$

③ مثال: برهن صحة العلاقة:

$$F(x)' = \left(\frac{a^x}{\ln x}\right) = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot a^x\right) = \frac{1}{\ln a}(a^x)'$$

$$= \frac{1}{\ln(a)}\left(\ln(a) \cdot a^x\right) = a^x = f(x)$$

⑨ برهن: ☆

$$F(x)' = (ch(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + (-1)e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x) = f(x)$$

برهن: ☆

$$F(x)' = [-cth(x)]'$$

$$= \left[-\frac{ch x}{sh x}\right]' = \left[-\frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x}\right]$$

$$= \left[\frac{ch^2 x - sh^2 x}{sh^2 x}\right] = \frac{1}{sh^2 x} = f(x)$$

حالات خاصة (هام):

① $\int g'(x)(g(x))^n d(x) = \frac{(g(x))^{n+1}}{n+1} + C$

② $\int \frac{g(x)'}{g(x)} d(x) = \ln(g(x)) + C$

③ $\int g'(x) e^{g(x)} d(x) = e^{g(x)} + C$

④ $\int g'(x) \sin(g(x)) d(x) = -\cos(g(x)) + C$

(5) $\int g'(x)\cos(g(x))\,dx = \sin(g(x)) + c$

(6) $\int \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\,d(x) = \tan(g(x)) + c$

أوجد التكاملات التالية:

II) $\int (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} + 5) =$

$$\int \left(x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}} + 5\right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5x + c$$

$$= \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 5x + c = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 5x + c$$

2) $\int (2x-3)\, e^{x^2-3x+1}\, dx$

$g(x) = x^2 - 3x + 1$

$g'(x) = (2x - 3)$

حسب النظرية (3).

$= e^{x^2-3x+1} + c$

3) $\int (x^3 - 3x^2)\, e^{x^4-4x^3-1}$

$g(x) = x^4 - 4x^3 - 1$

$g(x)' = 4x^3 - 12x$

حسب النظرية (3).

$= \frac{1}{4}\int 4(x^3 - 3x^2)\, e^{x^4-4x^3-1} = \frac{1}{4} e^{x^4-4x^3-1} + c$